ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Conceitos Básicos

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

Sumário

1. Plano de Ensino
- Ementa da Disciplina
- Objetivos da Disciplina
- Metodologia de Ensino
- Critérios de avaliação
- Bibliografia e Referências

2. Conceitos Básicos
- Sistemas de Unidades
- Prefixos Decimais
- Grandezas Básicas
- Exercícios

Ementa da Disciplina

A **ementa da disciplina** consiste nos seguintes tópicos:

- **Módulo 1**:
  - Conceitos básicos;
  - Lei de Ohm, leis de Kirchhoff e circuitos resistivos;
  - Transformação $Y - \Delta$;
- **Módulo 2**:
  - Análise nodal e análise de malhas;
- **Módulo 3**:
  - Técnicas adicionais de análise;
  - Teoremas de Thévenin e Norton;
  - Máxima transferência de potência;
  - Amplificadores operacionais.

Objetivos da Disciplina

- Apresentar a **teoria de circuitos** como uma ferramenta que permite **equacionar, calcular e analisar** o comportamento de **sistemas elétricos e eletrônicos** através de modelos compostos por **elementos idealizados de circuito**.

Metodologia de Ensino

- A metodologia empregada na disciplina de Introdução aos Circuitos Elétricos consiste na **apresentação do conteúdo teórico de forma presencial**
- O **critério de avaliação** é fundamentado em **três avaliações presenciais**
- Os **materiais didáticos** utilizados ao longo da disciplina, como *slides* e listas de exercícios, serão **disponibilizados no SIGAA**

Critérios de avaliação

- O **critério de avaliação** será composto por **três provas escritas**, realizadas exclusivamente de forma presencial, correspondentes às notas P_1, P_2 e P_3, cada uma variando de 0 a 10
- A **nota final** será calculada como

$$N_{\mathsf{f}} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}, \tag{1}$$

  em que P_1, P_2 e P_3 representam as notas de cada prova
- O aluno será **aprovado** por média caso $N_{\mathsf{f}} \geq 5$ e tenha, no mínimo, **75% de frequência nas aulas**

Critérios de avaliação

Tabela 1: Conteúdos das avaliações da disciplina Introdução aos Circuitos Elétricos.

Avaliação	Conteúdo
Avaliação 1 (P_1)	1. Conceitos Básicos 2. Circuitos Resistivos 3. Transformação $Y - \Delta$
Avaliação 2 (P_2)	1. Análise Nodal 2. Análise de Malhas
Avaliação 3 (P_3)	1. Técnicas adicionais de análise 2. Thévenin e Norton 3. Máxima Transferência de Potência 4. Amplificadores Operacionais

Critérios de avaliação

- **Não haverá**, em hipótese alguma, **prova de reposição com fins de substituição ou complementação de nota**
- **Não será permitido adiantamento ou adiamento das provas escritas** por qualquer motivo pessoal do(s) aluno(s)
- Será **automaticamente atribuída nota zero** (0,00) ao aluno que **não comparecer às provas nas datas oficiais**
- No dia de prova, o **atraso máximo permitido para entrada em sala de aula é de 5 minutos**. Após esse prazo, o aluno não poderá realizar a avaliação
- O aluno só poderá realizar as provas na turma em que estiver regularmente matriculado

Critérios de avaliação

- Durante a realização da prova, será permitido apenas o uso de **calculadora, lápis, caneta e borracha**
- É **proibido** o uso de qualquer **equipamento eletrônico (exceto calculadora) ou material adicional**
- Alunos envolvidos em **práticas antiéticas** receberão nota zero (0,00) na atividade e **serão reprovados na disciplina, com atribuição de menção SR**
- Cumpre mencionar que a chamada referente a cada encontro físico será realizada ao **início da primeira aula**

Critérios de avaliação

- **Frequência final inferior a 75%** resultará na **reprovação por falta**
- Após a divulgação das notas, os alunos terão direito à **vista de prova**
- A **revisão da correção** deverá ocorrer **exclusivamente na data e horário definidos pelo professor**
- O objetivo dessa revisão é **esclarecer dúvidas, identificar eventuais erros de correção e promover o entendimento do conteúdo**
- O **cronograma de atividades**, com as **datas das aulas e das provas**, está descrito no **plano de ensino anexado no SIGAA**
- É **estritamente proibido** o uso de celulares durante a aula

Bibliografia e Referências

- J. D. Irwin e R. Mark Nelms, **Análise Básica de Circuitos para Engenharia**, 10ª Edição, LTC, 2013.

Figura 1: Referência Básica.

Bibliografia e Referências

- J. W. Nilsson e S. A. Riedel, **Circuitos Elétricos**, Pearson, 2014.

Figura 2: Referência Básica.

Conceitos Básicos

Sistemas de Unidades

- O sistema de unidades empregado é o **Sistema Internacional de Unidades** (SI)
- As **medidas e unidades fundamentais** do SI são:
  - **Metro (m)**: medida de comprimento
  - **Quilograma (kg)**: medida de massa
  - **Segundo (s)**: medida de tempo
  - **Ampere (A)**: medida de corrente elétrica
  - **Kelvin (K)**: medida de temperatura
  - **Candela (cd)**: medida de intensidade luminosa

Sistemas de Unidades

- Na análise de **circuitos elétricos**, as principais unidades de medida são:
  - **Ampere (A)**: medida de corrente
  - **Coulomb (C)**: medida de carga
  - **Volt (V)**: medida de tensão
  - **Joule (J)**: medida de energia
  - **Watt (W)**: medida de potência
  - **Weber (Wb)**: medida de fluxo magnético
  - **Segundo (s)**: medida de tempo

Prefixos Decimais

- Os **prefixos decimais** adotados pelo SI são:
  - **Pico (p)**: 10^{-12}
  - **Nano (n)**: 10^{-9}
  - **Micro (μ)**: 10^{-6}
  - **Mili (m)**: 10^{-3}
  - **Quilo (k)**: 10^{3}
  - **Mega (M)**: 10^{6}
  - **Giga (G)**: 10^{9}
  - **Tera (T)**: 10^{12}

Grandezas Básicas – Corrente Elétrica

- A **grandeza mais elementar** na análise de circuitos elétricos é a **carga elétrica**
- A carga de um **elétron é negativa** e tem magnitude igual a 1.602×10^{-19} C
- A carga de um **próton é positiva** e tem magnitude igual a 1.602×10^{-19} C
- A **lei da conservação de carga** determina que a carga não pode ser criada nem destruída, apenas **transferida**
- O **movimento de cargas** em um caminho resulta na **transferência de energia**
- Um **circuito elétrico** é, em essência, um **canal controlado que transfere cargas de um ponto a outro**

Grandezas Básicas – Corrente Elétrica

- A **taxa de variação temporal de cargas** ao longo de uma seção transversal define a **corrente elétrica**
- A **corrente elétrica** é **medida em Ampere (A)**

Relação carga $\times$ corrente elétrica

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ [A]} \longleftrightarrow q(t) = \int_{-t_0}^{t} i(x)dx \text{ [C]} \tag{2}$$

em que $i(t)$ representa a corrente elétrica e $q(t)$ representa a carga elétrica, ambas em função do tempo t.

- O **fluxo de corrente elétrica** possui uma **direção**. Logo, a corrente elétrica é caracterizada por sua **magnitude e direção**

Grandezas Básicas – Corrente Elétrica

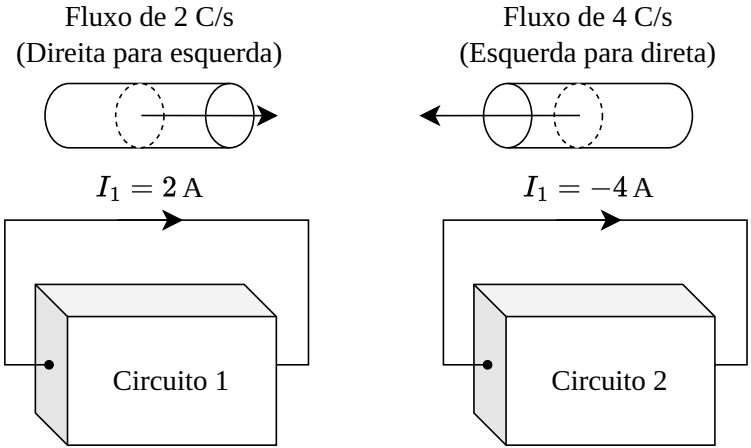


Figura 3: Ilustração da direção da corrente elétrica.

Grandezas Básicas – Corrente Elétrica

- Os circuitos elétricos típicos podem operar em **dois modos**:
  - **Corrente contínua (CC)** (*Direct Current* – DC): invariante no tempo
  - **Corrente alternada (CA)** (*Aternating Current* – AC): variante no tempo, tipicamente com comportamento periódico e senoidal

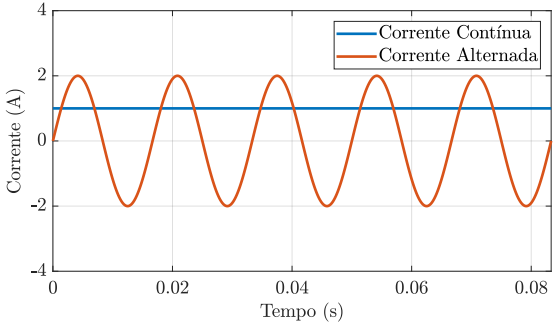


Figura 4: Corrente contínua e alternada.

Grandezas Básicas – Tensão

- Para **mover um elétron ou alguma unidade de carga** em um condutor é necessário algum **trabalho ou transferência de energia**
- Este trabalho é realizado por uma **força eletromotriz externa**, tipicamente representada por uma **bateria ou fonte**
- A **tensão** (diferença de potencial) entre dois pontos é definida como a **energia necessária para mover uma unidade de carga** (1 C)
- Equivalentemente, se uma **unidade de carga se move entre dois pontos**, a energia necessária para o movimento é a **diferença dos níveis de energia entre os dois pontos**, definindo assim a **tensão**
- A unidade de tensão, o Volt, pode ser expressa como V=J/C (**energia por unidade de carga**)

Grandezas Básicas – Tensão

- No diagrama abaixo, a **tensão entre os terminais $A - B$** é a **diferença de potencial entre os terminais**
- Os **sinais** $+$ e $-$ são usados para definir a **referência ou polaridade da tensão**
- No diagrama abaixo, o **ponto A é o ponto de maior potencial**
- O **ponto A tem 2 V a mais que o ponto B**

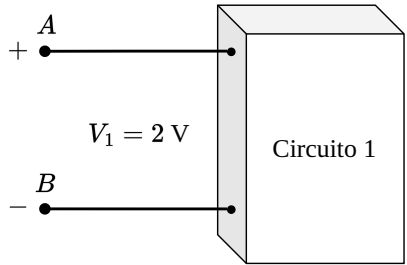


Figura 5: Representações da tensão.

Grandezas Básicas – Tensão

- O **ponto B é o ponto de maior potencial**
- O **ponto B tem 5 V a mais que o ponto A**

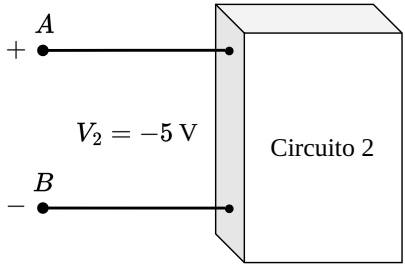


Figura 6: Representações da tensão.

Grandezas Básicas – Tensão

- Definimos anteriormente que a tensão é a **energia necessária para mover uma carga de 1 C** ao longo de um elemento
- A tensão pode ser relacionada com o **trabalho**, sendo este uma medida de **transferência energética**
- Em um circuito elétrico, essa transferência se dá entre a **fonte e a carga**

Relação trabalho $\times$ tensão

$$v = \frac{dw}{dq} \text{ [V ou J/C]} \tag{3}$$

em que w denota o trabalho e q a carga.

Grandezas Básicas – Exercícios

Exemplo 1

A corrente nos terminais de um elemento é expressa por

$$i(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0, \\ 20e^{-5000t} \text{ A, se } t \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Calcule a carga total, em μC, que entrou no elemento.

***Resposta**: 4000 μC.*

Grandezas Básicas – Exercícios

Exemplo 2

A quantidade de carga que entra em um elemento ao longo do tempo é expressa por

$$q(t) = \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha t} \text{ C}. \tag{5}$$

Determine o valor máximo da corrente neste elemento. Considere que $\alpha = 0,03679$ s^{-1}.

***Resposta**: 10 A.*

Grandezas Básicas – Potência

- A potência é uma **medida da taxa de variação da energia com o tempo**
- A potência é uma grandeza medida em **Watts**

Potência

$$p = \frac{dw(t)}{dt} \tag{6}$$

em que $w(t)$ é a função de variação do trabalho (energia) com o tempo

Relação da potência com a tensão e a corrente

$$p\ [\mathrm{W}] = \frac{dw}{dt}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right] = \left(\frac{dw}{dq}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right]\right)\left(\frac{dq}{dt}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\right]\right) = vi \tag{7}$$

em que p representa a **potência** ou a **taxa de variação energética com o tempo**

Grandezas Básicas – Potência

- **Convenção de sinal passiva**:
  - **O termo de tensão $v(t)$ é definido como a tensão em torno do elemento com referência positiva no terminal em que a corrente $i(t)$ está entrando**
  - O produto vi, determina a **magnitude e o sinal da potência**
  - Se $p > 0$ (positivo), o **elemento está consumindo potência**
  - Se $p < 0$ (negativo), o **elemento está fornecendo potência**

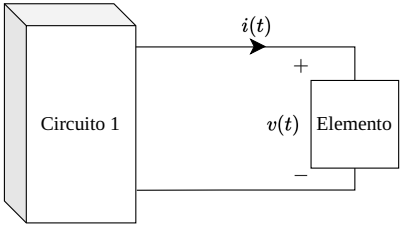


Figura 7: Convenção de sinal passiva.

Grandezas Básicas – Energia

- A partir da definição de potência, a **energia absorvida ou fornecida por um elemento** entre os tempos t_0 e t é calculada por:

Energia

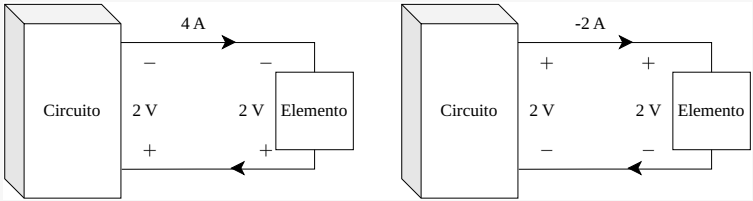
$$w = \int_{t_0}^{t} p(x)dx = \int_{t_0}^{t} v(x)i(x)dx. \tag{8}$$

- A energia é uma grandeza medida em **Joule** (J)

Exemplos e Exercícios

Exemplo 3

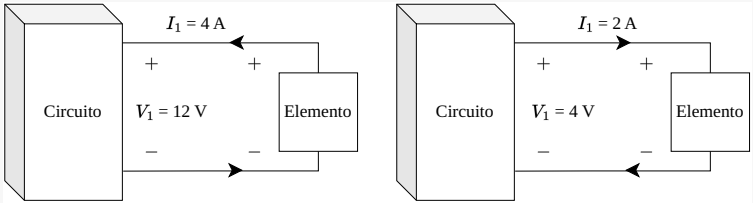
Determine a potência nos elementos dos circuitos abaixo e indique se há consumo ou fornecimento.



Exemplos e Exercícios

Exemplo 4

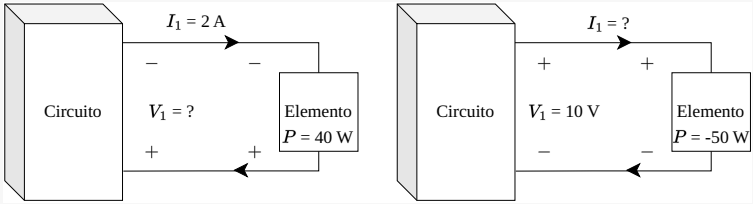
Determine a potência nos elementos dos circuitos abaixo e indique se há consumo ou fornecimento.



Exemplos e Exercícios

Exemplo 5

Determine as variáveis desconhecidas nos circuitos abaixo.



Grandezas Básicas – Exercícios

Exemplo 6

A tensão e a corrente nos terminais de um elemento são iguais a zero para $t < 0$. Para $t \geq 0$,

$$v(t) = 80te^{-500t} \text{ kV}, \tag{9}$$

e

$$i(t) = 15te^{-500t} \text{ A}. \tag{10}$$

Determine a função da potência instantânea e a energia total entregue ao elemento.

***Resposta**: 2,4 mJ.*

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Conceitos Básicos

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Elementos Básicos de Circuitos Elétricos

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

Sumário

1. Elementos Básicos de Circuitos Elétricos
   - Fontes Independentes
   - Fontes Dependentes
     - Fonte de Tensão Dependente Controlada por Tensão
     - Fonte de Tensão Dependente Controlada por Corrente
     - Fonte de Corrente Dependente Controlada por Tensão
     - Fonte de Corrente Dependente Controlada por Corrente

2. Teorema de Tellegen

3. Exercícios de Fixação

Elementos Básicos de Circuitos Elétricos

Elementos Básicos de Circuitos Elétricos

- Nas aulas passadas, definimos as **principais grandezas físicas** envolvidas na análise de circuitos:
  - **Tensão** (V)
  - **Corrente elétrica** (A)
  - **Potência** (W)
- Agora, vamos definir os **elementos básicos** que compõem os circuitos elétricos.
- Os **elementos dos circuitos elétricos** podem ser **classificados** como:
  - **Ativos**: fornecem energia/potência.
  - **Passivos**: consomem energia/potência.

Elementos Básicos de Circuitos Elétricos

- Os elementos de um circuito elétrico podem ser classificados em:
  - **Passivos**: aqueles que consomem ou armazenam energia
    - **Resistor**
    - **Capacitor**
    - **Indutor**
  - **Ativos**: aqueles que fornecem ou controlam energia
    - **Fonte de tensão independente**
    - **Fonte de corrente independente**
    - **Fonte de tensão dependente**
    - **Fonte de corrente dependente**

Fonte de Tensão Independente

- Uma **fonte de tensão independente** é um elemento de dois terminais que **mantém uma tensão** $v(t)$ entre seus terminais, **independentemente de outros fatores do circuito**

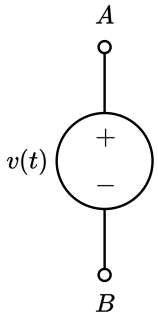


Figura 1: Representação de uma fonte de tensão independente.

Fonte de Corrente Independente

- Uma **fonte de corrente independente** é um elemento de dois terminais que mantém uma corrente $i(t)$ através de seus terminais, **independentemente de outros fatores do circuito**

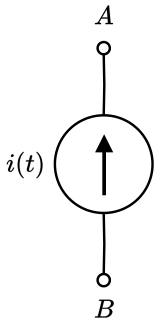


Figura 2: Representação de uma fonte de corrente independente.

Fontes Independentes

- As fontes independentes são **modelos matemáticos** que possuem limitações práticas
- Na realidade, **não existem fontes que garantam níveis de corrente ou tensão independentemente das circunstâncias**
- Em geral, as **fontes práticas são limitadas pela potência máxima** que podem fornecer
- Portanto, os modelos de fontes independentes são **idealizações úteis** dentro de determinados regimes de operação

Exemplo 1

- Determine a potência associada aos elementos no circuito da figura abaixo.

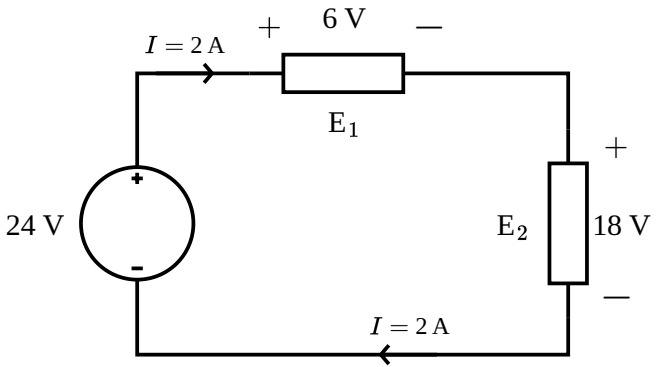


Figura 3: Exemplo com fonte de tensão independente.

Exemplo 2

- Determine a potência associada aos elementos no circuito da figura abaixo

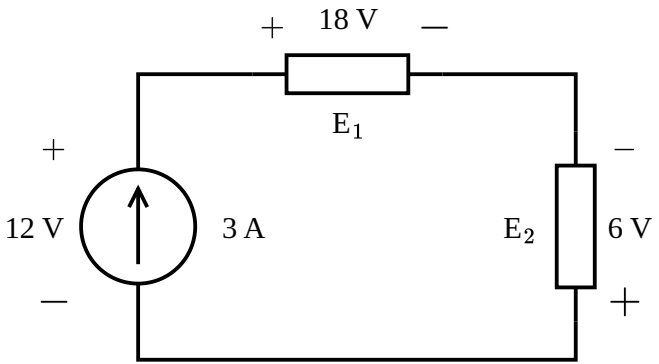


Figura 4: Exemplo com fonte de corrente independente.

Fonte Dependentes

- Em contraste com as fontes independentes, as **fontes dependentes** geram tensão ou corrente **determinadas por níveis de tensão ou corrente em outros pontos do circuito**

Fonte de Tensão Dependente Controlada por Tensão

- O diagrama abaixo representa uma fonte de **tensão dependente controlada por tensão**
- A constante μ (**ganho de tensão**) relaciona a **tensão de controle** v_S com a **tensão controlada** v
- Como a relação é **tensão-tensão**, μ é adimensional

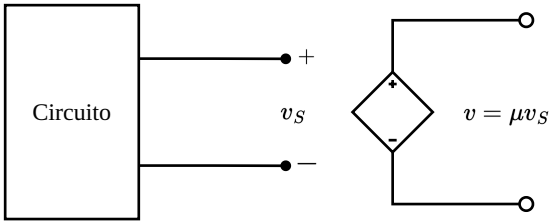


Figura 5: Fonte de tensão dependente controlada por tensão.

Fonte de Tensão Dependente Controlada por Corrente

- O diagrama abaixo representa uma **fonte de tensão dependente controlada por corrente**
- A constante r relaciona a **corrente de controle** i_S com a **tensão controlada** v
- Como a relação é **tensão-corrente**, a constante r possui uma **unidade** (Ohms - Ω)

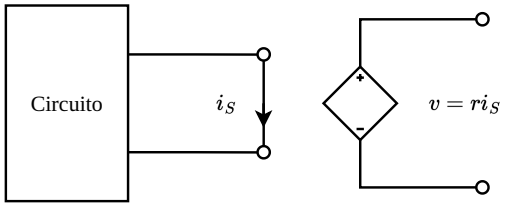


Figura 6: Fonte de tensão dependente controlada por corrente.

Fonte de Corrente Dependente Controlada por Tensão

- O diagrama abaixo representa uma **fonte de corrente dependente controlada por tensão**
- A constante g relaciona a **tensão de controle** v_S com a **corrente controlada** i
- Como a relação é **corrente-tensão**, a constante g possui uma unidade (Siemens – S ou $1/\Omega$)

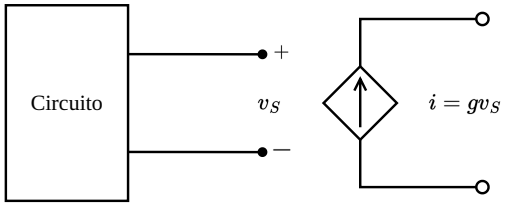


Figura 7: Fonte de corrente dependente controlada por tensão.

Fonte de Corrente Dependente Controlada por Corrente

- O diagrama abaixo representa uma **fonte de corrente dependente controlada por corrente**
- A constante β relaciona a **corrente de controle** i_S com a **corrente controlada** i
- Como a relação é **corrente-corrente**, a constante β é adimensional

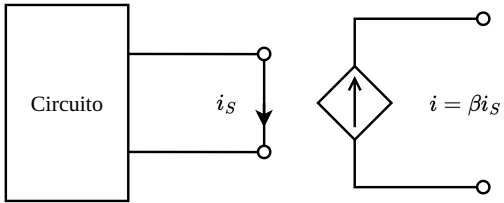


Figura 8: Fonte de corrente dependente controlada por corrente.

Teorema de Tellegen

- O **teorema de Tellegen** determina que:

Teorema de Tellegen

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 0, \tag{1}$$

em que N é número de elementos no circuito e P_i é a potência correspondente ao i-ésimo elemento. Em outros termos, o teorema de Tellegen nos informa que a energia no circuito é conservada e que a soma das potências (fornecidas e consumidas) devem se balancear.

Exercício 1

- A curva de corrente como uma função do tempo que flui sob um elemento é apresentada na Fig. 9. Determine quanto de carga passou por este elemento no intervalo entre $0 < t < 20$ s. **Resposta**: 0,15 C.

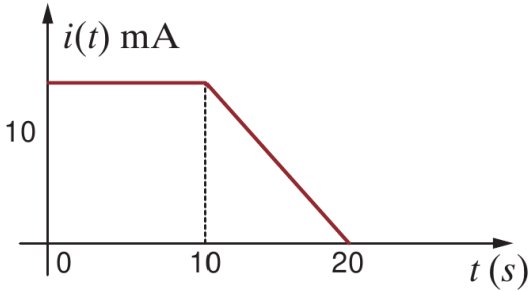


Figura 9: Curva de corrente em função do tempo.

Exercício 2

- A carga total entrando pelo terminal positivo de um elemento é expressa por $q(t) = -30e^{-4t}$ mC. Se a tensão nos terminais do elemento é $v(t) = 120e^{-2t}$ V, determine a energia entregue ao elemento no intervalo de tempo $0 < t < 50$ ms. **Resposta**: 0,622 J.

Exercício 3

- Determine a potência consumida ou fornecida pelo elemento da Fig. 10 se
  1. $V_1 = 9$ V e $I = 2$ A. **Resposta**: 18 W (Consumindo)
  2. $V_1 = 9$ V e $I = -3$ A. **Resposta**: -27 W (Fornecendo)
  3. $V_1 = -12$ V e $I = 2$ A. **Resposta**: -24 W (Fornecendo)
  4. $V_1 = -12$ V e $I = -3$ A. **Resposta**: 36 W (Consumindo)

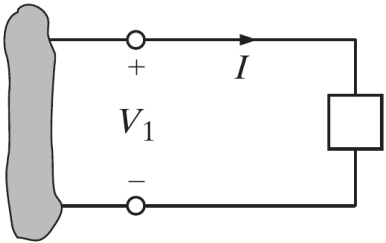


Figura 10: Circuito do exercício 3.

Exercício 4

- O elemento A do diagrama da Fig. 11 consome 30 W de potência. Calcule V_x. **Resposta**: -15 V.

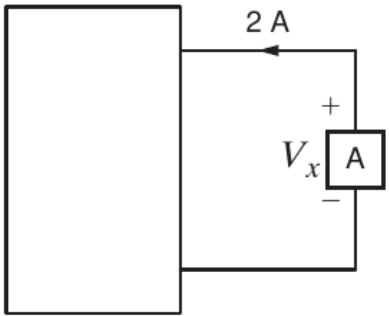


Figura 11: Circuito do exercício 4.

Exercício 5

- O elemento B do diagrama na Fig. 12 fornece 72 W de potência. Calcule V_A. **Resposta**: 24 V.

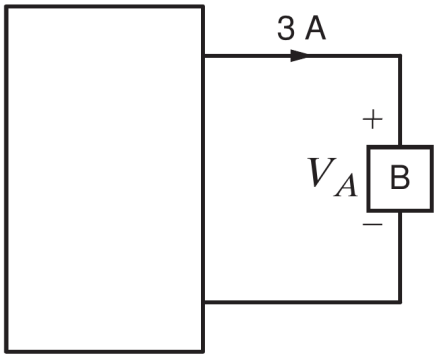


Figura 12: Circuito do exercício 5.

Exercício 6

- Na Fig. 13, o elemento 1 consome 36 W de potência. O elemento 2 está consumindo ou fornecendo, e quanto? **Resposta**: 18 W (Consumindo).

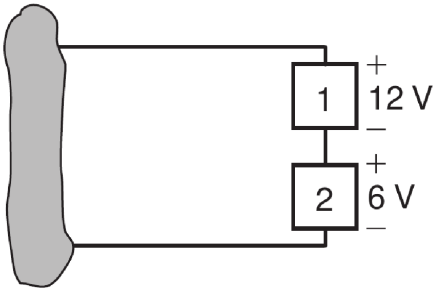


Figura 13: Circuito do exercício 6.

Exercício 7

- Na Fig. 14, o elemento 2 fornece 48 W de potência. O elemento 1 está consumindo ou fornecendo, e quanto? **Resposta**: 12 W (Consumindo).

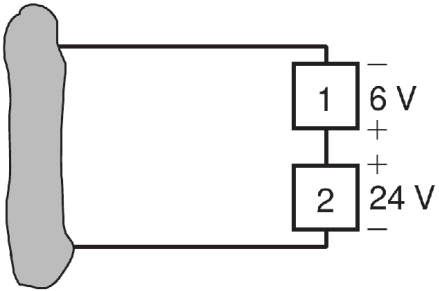


Figura 14: Circuito do exercício 7.

Exercício 8

- Encontre as potências correspondentes aos elementos do circuito na Fig. 15. Confirme o teorema de Tellegen. **Resposta**: $P_{\text{FC}} = -40$ W (fornecendo), $P_1 = 12$ W (consumindo) e $P_{\text{FT}} = 28$ W (consumindo).

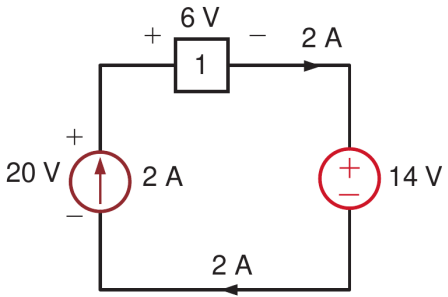


Figura 15: Circuito do exercício 8.

Exercício 9

- Encontre as potências correspondentes aos elementos do circuito na Fig. 16. Confirme o teorema de Tellegen. **Resposta**: $P_{\text{FC}} = -64$ W (fornecendo), $P_1 = 32$ W (consumindo) e $P_{\text{FDT}} = 32$ W (consumindo).

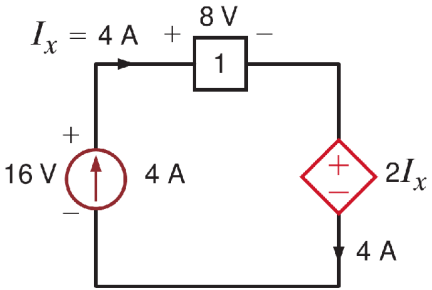


Figura 16: Circuito do exercício 9.

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Elementos Básicos de Circuitos Elétricos

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Circuitos Resistivos

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

Sumário

1. Circuitos Resistivos
2. Lei de Ohm
   - Casos Limite
   - Exercícios de Fixação
3. Leis de Kirchhoff
   - Lei de Kirchhoff das Correntes
     Exercícios de Fixação
   - Lei de Kirchhoff das Tensões
     Exercícios de Fixação
   - Divisor de Tensão
     Resistência Equivalente em Série
     Exercícios de Fixação
   - Divisor de Corrente
     Resistência Equivalente em Paralelo
     Exercícios de Fixação
4. Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$

Circuitos Resistivos

Lei de Ohm

- A **Lei de Ohm** estabelece que a tensão elétrica em um **resistor** é diretamente proporcional à corrente elétrica que o atravessa
- A **resistência elétrica**, medida em ohms (Ω), representa a **constante de proporcionalidade** entre tensão e corrente
- A **resistência** caracteriza a **oposição que um material oferece à passagem de corrente elétrica**
- Dispositivos cujo comportamento é **predominantemente resistivo** são denominados **resistores**
- Em um resistor ideal, a relação entre tensão e corrente é **linear**

Lei de Ohm

$$v(t) = R\,i(t), \quad \text{onde } R \geq 0, \tag{1}$$

sendo R o valor da resistência elétrica expresso em ohms ($1\ \Omega \equiv 1$ V/A).

Lei de Ohm

- A Figura 1 apresenta o **símbolo esquemático de um resistor** e as convenções de polaridade
- A **convenção passiva** é usada em conjunção com a **lei de Ohm** para determinar as características de corrente e tensão em um resistor

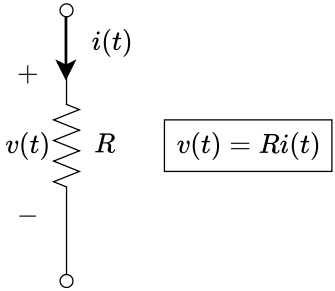


Figura 1: Representação esquemática de um resistor com indicação da convenção passiva de sinal.

Lei de Ohm - Comportamento Energético

- O resistor é um **elemento passivo** que **dissipa energia elétrica**
- Em um resistor ideal, toda **potência elétrica** é **convertida em calor** (efeito Joule)
- O fluxo de cargas ocorre do **maior para o menor potencial elétrico**, com dissipação contínua de energia

Potência Instantânea em Resistor

$$p(t) = v(t)i(t) = R\,i^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{2}$$

- Como consequência direta de (2) e considerando $R \geq 0$, tem-se que:
  - A **potência instantânea** é sempre **não-negativa** ($p(t) \geq 0$)

Lei de Ohm - Considerações Importantes

- A relação tensão-corrente estabelecida pela Lei de Ohm:
  - É **exclusivamente válida** para a tensão e corrente **nos terminais do mesmo resistor**
  - Representa uma **relação local** entre grandezas elétricas

- **Restrições fundamentais:**
  - Não se pode combinar **tensão de um componente** com **corrente de outro componente**
  - A validade da relação está condicionada à **medida simultânea** de $v(t)$ e $i(t)$ no mesmo elemento

Relação Válida

$$v_{AB}(t) = R \cdot i_{AB}(t)$$

(Tensão e corrente medidas no mesmo resistor entre os pontos A e B)

Casos Limite

- **Curto-circuito ideal** ($R \to 0$):
  - Tensão terminal obrigatoriamente nula: $v(t) = 0$ (para qualquer $i(t)$)
  - Comportamento como um condutor perfeito
  - Corrente determinada pelo resto do circuito
- **Circuito aberto ideal** ($R \to \infty$):
  - Corrente obrigatoriamente nula: $i(t) = 0$ (para qualquer $v(t)$)
  - Comportamento como um isolante perfeito
  - Tensão determinada pelo resto do circuito

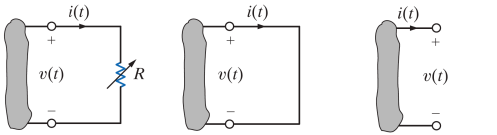


Figura 2: Representação dos casos limite: (a) Curto-circuito ($R = 0$) e (b) Circuito aberto ($R \to \infty$).

Exercício 1

- Determine a corrente e a potência dissipada nos resistores da Fig. 3.

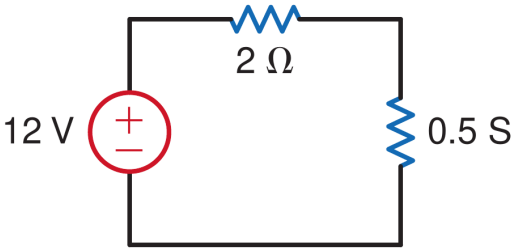


Figura 3: Circuito do exercício 1.

Exercício 2

- Encontre as tensões e as potências dissipadas nos resistores da Fig. 4.

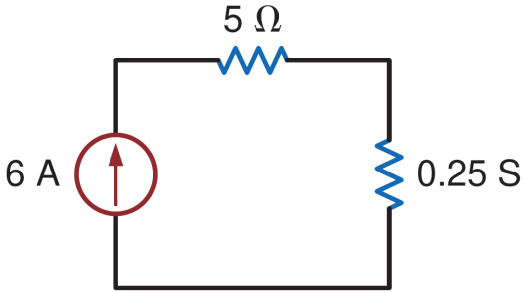


Figura 4: Circuito do exercício 2.

Exercício 3

- No circuito da Fig. 5, a potência absorvida por R_x é de 20 mW. Encontre o valor de R_x.

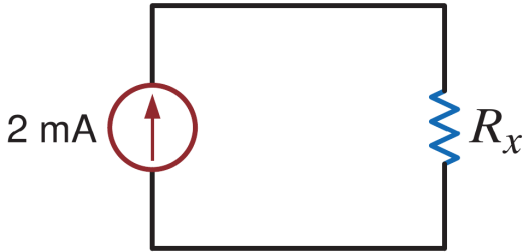


Figura 5: Circuito do exercício 3.

Leis de Kirchhoff - Conceitos Fundamentais

- Conexões entre elementos são feitas por **condutores perfeitos** (resistência nula)
- **Nó** (ponto de conexão):
  - Ponto onde dois ou mais elementos se conectam
  - Todos os pontos acessíveis por condutores perfeitos representam um único nó
- **Malha** (caminho fechado):
  - Trajetória que inicia e termina no mesmo nó
  - Não repete nenhum nó intermediário
- **Ramo** (elemento único):
  - Trecho entre dois nós consecutivos
  - Contém apenas um elemento do circuito

Leis de Kirchhoff

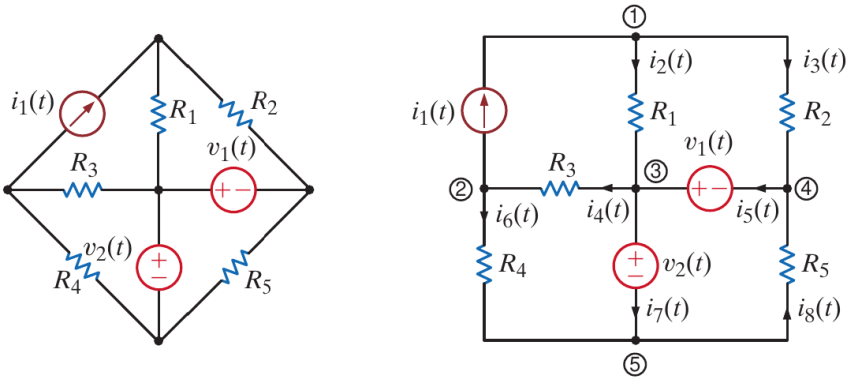


Figura 6: Ilustração de nós, malhas e ramos.

Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC)

Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC)

$$\sum_{k=1}^{N} i_k(t) = 0 \tag{3}$$

em que N é o número de ramos conectados ao nó e $i_k(t)$ é a corrente no k-ésimo ramo (considerando a convenção de sinais)

- **Princípio Físico:** Conservação da carga elétrica
  - Soma das correntes entrando = Soma das correntes saindo
  - Não há acúmulo de carga em um nó
- **Convenção de Sinais:**
  - \+ Correntes **saindo** do nó
  - \- Correntes **entrando** no nó

Exercício 4

- Encontre a corrente I_1 no circuito da Fig. 7. **Resposta:** $I_1 = 10$ mA.

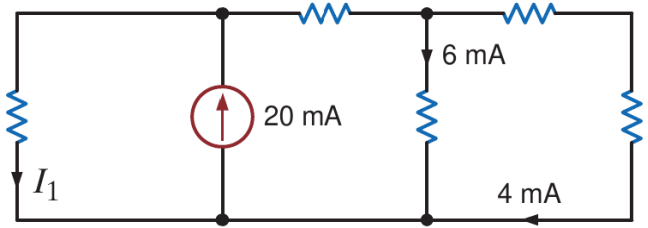


Figura 7: Circuito do exercício 4.

Exercício 5

- Encontre as correntes I_0 e I_1 no circuito da Fig. 8. **Resposta:** $I_0 = 3$ mA e $I_1 = -2$ mA.

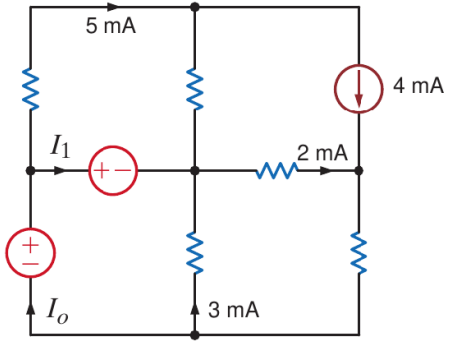


Figura 8: Circuito do exercício 5.

Exercício 6

- Determine a corrente I_L no circuito da Fig. 9. **Resposta:** $I_L = 0.4$ mA.

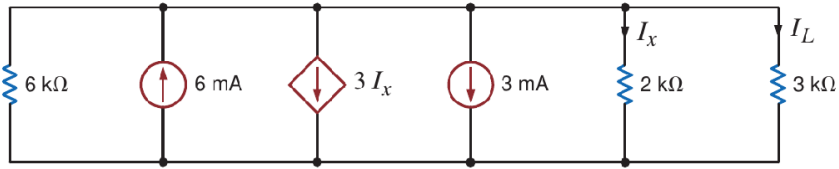


Figura 9: Circuito do exercício 6.

Exercício 7

- Determine a corrente I_1 no circuito da Fig. 10. **Resposta:** $I_1 = -10$ mA.

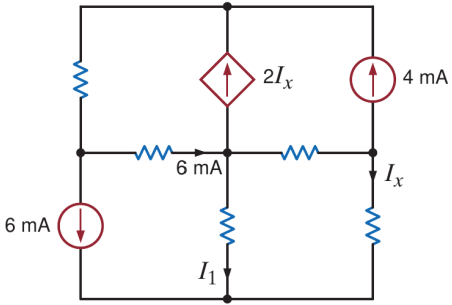


Figura 10: Circuito do exercício 7.

Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT)

Formulação Matemática

$$\sum_{k=1}^{N} v_k(t) = 0, \tag{4}$$

em que N é número de elementos na malha e $v_k(t)$ é a tensão no k-ésimo elemento

- **Princípio Fundamental:** Conservação de energia
  - Soma das quedas de tensão = Soma dos aumentos de tensão
  - Trabalho total em uma volta completa é nulo
- **Convenção de Sinais:**
  - \+ Queda de potencial (sentido $+ \rightarrow -$)
  - \- Aumento de potencial (sentido $- \rightarrow +$)
  - Tensão $V_{ab} = V_a - V_b$ (potencial em a relativo a b)

Exercício 8

- Encontre a tensão V_{ad} no circuito da Fig. 11. **Resposta:** $V_{ad} = 7$ V.

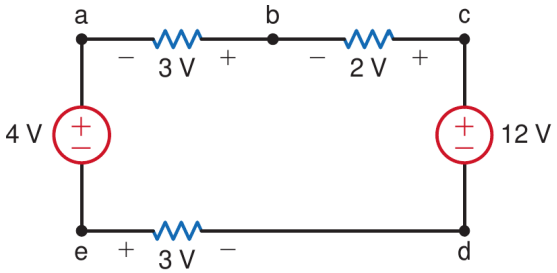


Figura 11: Circuito do exercício 8.

Exercício 9

- Encontre as tensões V_{fb} e V_{ec} no circuito da Fig. 12. **Resposta:** $V_{fb} = -8$ V e $V_{ec} = -6$ V.

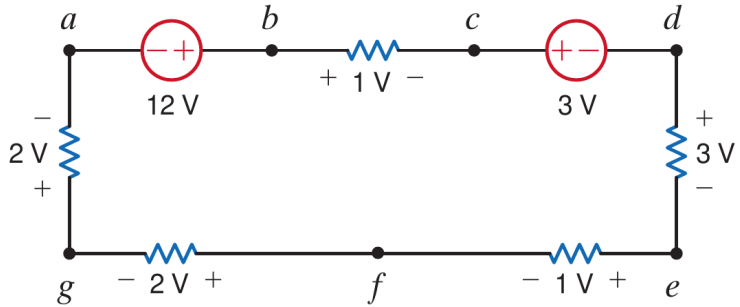


Figura 12: Circuito do exercício 9.

Exercício 10

- Encontre as tensões V_x e V_y no circuito da Fig. 13. **Resposta:** $V_x = 22$ V e $V_y = 6$ V.

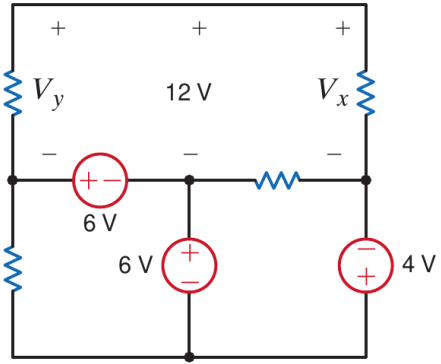


Figura 13: Circuito do exercício 10.

Exercício 11

- Encontre as tensões V_1 e V_2 e V_3 no circuito da Fig. 14. **Resposta:** $V_1 = 10$ V, $V_2 = 2$ V e $V_3 = 8$ V.

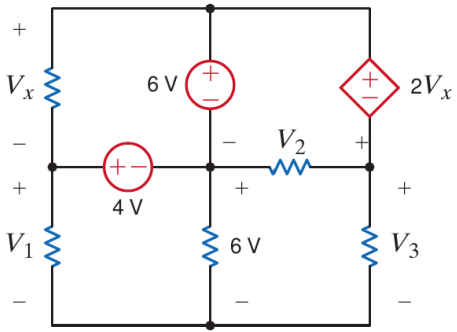


Figura 14: Circuito do exercício 11.

Exercício 12

- Encontre a tensão V_o no circuito da Fig. 15. **Resposta:** $V_o = -24/7$ V.

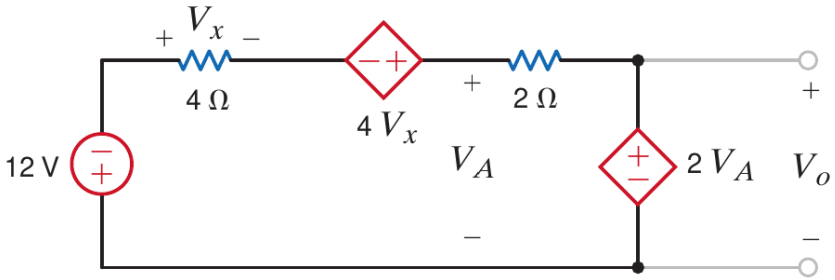


Figura 15: Circuito do exercício 12.

Resistência Equivalente em Série

Definição e Cálculo

Para N resistores conectados em série entre os nós a e b:

$$R_S = \sum_{k=1}^{N} R_k = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \tag{5}$$

onde R_S é o resistor equivalente que produz o mesmo efeito global.

- **Características Fundamentais:**
  - A mesma corrente flui através de todos os resistores
  - A tensão total se divide entre os resistores
  - A potência total é a soma das potências individuais
- **Considerações Importantes:**
  - A equivalência mantém as relações tensão-corrente nos terminais a e b
  - A posição dos elementos na série não altera o valor equivalente

Divisor de Tensão

- **Quando aplicar?**
  - Situação em que existem N resistores em série entre dois nós a e b
  - Quando a tensão terminal V_{ab} é conhecida
  - Só é aplicável quando todos os resistores (individuais ou equivalentes) compartilham a mesma corrente (disposição em série)

Divisor de Tensão (Caso geral)

$$v_{R_n}(t) = \frac{R_n}{R_S} v(t), \tag{6}$$

em que $R_S = \sum_{n=1}^{N} R_n$ é a resistência equivalente em série.

Divisor de Tensão (Caso particular para 2 resistores)

$$v_{R_1}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t), \; v_{R_2}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t). \tag{7}$$

Divisor de Tensão

- Seja

$$v_{R_1}(t) = R_1 i(t); \;\; v_{R_2}(t) = R_2 i(t) \tag{8}$$

em que

$$v(t) = v_{R_1}(t) + v_{R_2}(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t). \tag{9}$$

- Portanto,

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2}. \tag{10}$$

e assim,

$$v_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t), \;\; v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) \tag{11}$$

Obs: Evita-se o cálculo diretamente da corrente.

Exercício 13

- A fonte de 100 V no circuito da Fig. 16 fornece 200 W. Encontre o valor de V_2. **Resposta:** $V_2 = -100$ V.

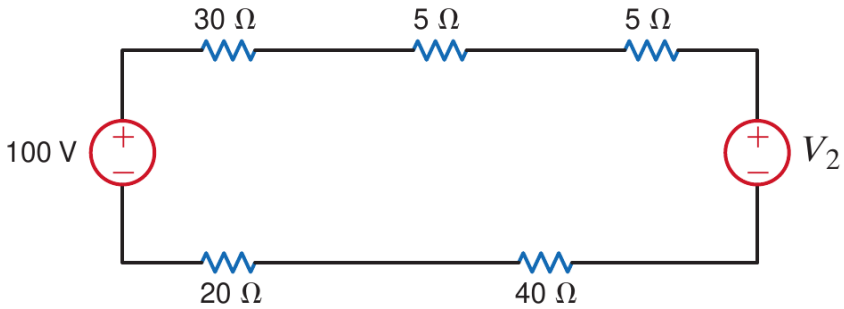


Figura 16: Circuito do exercício 13.

Exercício 14

- Se no circuito da Fig. 17, $V_{ad} = 3$ V, encontre o valor de V_S. **Resposta:** $V_S = 9$ V.

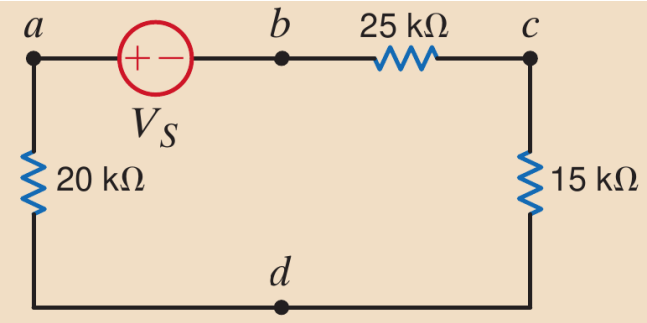


Figura 17: Circuito do exercício 14.

Resistência Equivalente em Paralelo

Definição e Cálculo

Para N resistores conectados em paralelo entre os nós a e b:

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \tag{12}$$

onde R_P é o resistor equivalente que produz o mesmo efeito global.

- **Características Fundamentais:**
  - Todos os resistores compartilham a mesma tensão terminal V_{ab}
  - A corrente total se divide entre os resistores
- **Considerações Importantes:**
  - A equivalência mantém as relações tensão-corrente nos terminais a e b
  - A posição dos elementos na série não altera o valor equivalente

Divisor de Corrente

- **Quando aplicar?**
  - Situação em que existem N resistores em paralelo entre dois nós a e b
  - Quando a corrente que entra no nó a (ou sai no nó b) é conhecida
  - Só é aplicável quando todos os resistores (individuais ou equivalentes) compartilham a mesma tensão (disposição em paralelo)

Divisor de Corrente (Caso geral)

$$i_{R_n}(t) = \frac{R_P}{R_n} v(t), \tag{13}$$

em que R_P é a resistência equivalente em paralelo.

Divisor de Corrente (Caso particular para 2 resistores)

$$i_{R_1}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t), \; i_{R_2}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t). \tag{14}$$

Divisor de Corrente

- Seja

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v(t) = \frac{v(t)}{R_{\text{eq}}}. \qquad (15)$$

- A resistência equivalente é sempre menor que R_1 e R_2.
- A conexão dos resistores em paralelo reduz a resistência global.
- $$i(t) = \frac{v(t)}{R_{\text{eq}}}, \;\; v(t) = i(t) R_{\text{eq}}. \qquad (16)$$

  e assim,

$$i_1(t) = \frac{v(t)}{R_1} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_1} i(t), \;\; i_2(t) = \frac{v(t)}{R_2} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_2} i(t). \qquad (17)$$

Exercício 15

- Encontre a resistência equivalente R_{AB} entre os terminais $A - B$ no circuito da Fig. 18. **Resposta**: 22 kΩ

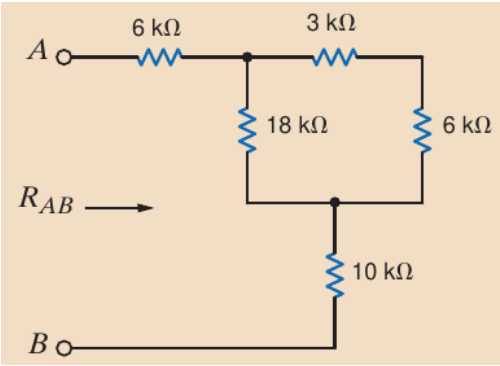


Figura 18: Circuito do exercício 15.

Exercício 16

- Encontre a resistência equivalente R_{AB} entre os terminais $A - B$ no circuito da Fig. 19. **Resposta**: 12 kΩ

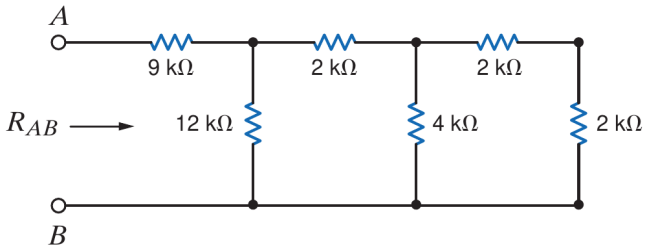


Figura 19: Circuito do exercício 16.

Exercício 17

- Encontre a corrente I_o no circuito da Fig. 20. **Resposta**: 4.5 mA.

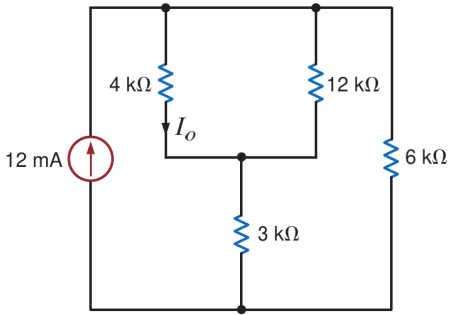


Figura 20: Circuito do exercício 17.

Exercício 18

- Encontre V_o, V_1 e V_2 no circuito da Fig. 21. **Resposta**: $V_o = 3.33$ V, $V_1 = -4$ V e $V_2 = 4$ V.

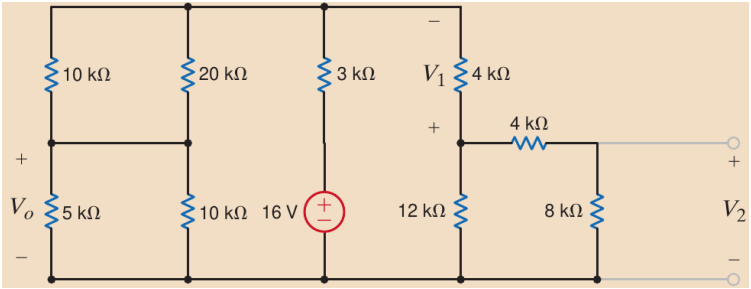


Figura 21: Circuito do exercício 18.

Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$

- Considere o **circuito** apresentado na Fig. 22
- Os resistores **não estão dispostos nem em série nem em paralelo**

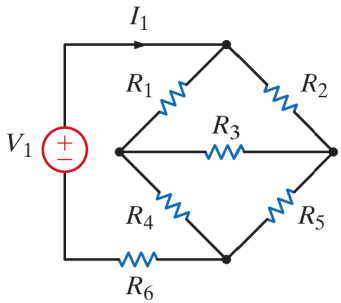


Figura 22: Circuito para ilustrar a necessidade de uma transformação $Y \leftrightarrow \Delta$.

Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$

- **Não podemos determinar um equivalente série ou paralelo** dos resistores

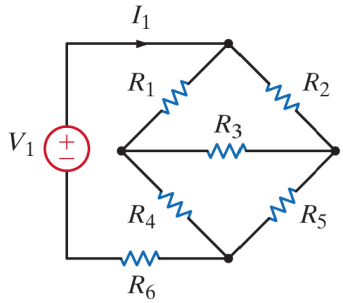


Figura 23: Circuito para ilustrar a necessidade de uma transformação $Y \leftrightarrow \Delta$.

Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$

- Para **simplificar o circuito**, aplicamos a **transformação** $Y \leftrightarrow \Delta$
  - $\Delta \rightarrow Y$: $(R_1, R_2, R_3) \rightarrow (R_a, R_b, R_c)$
  - $Y \rightarrow \Delta$: $(R_a, R_b, R_c) \rightarrow (R_1, R_2, R_3)$

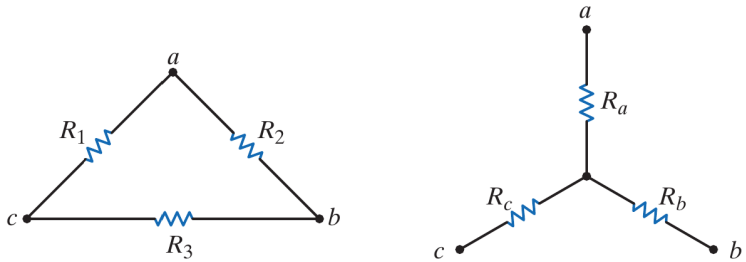


Figura 24: Disposição de resistores em Δ e em Y.

Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$

Para transformar uma disposição Δ em uma disposição Y, aplicamos:

Transformação $\Delta \rightarrow Y$

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \tag{18}$$

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \tag{19}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{20}$$

Transformação $\Delta \rightarrow Y$ (Caso particular em que $R_1 = R_2 = R_3 = \bar{R}$)

$$R_a = R_b = R_c = \frac{1}{3}\bar{R}, \tag{21}$$

Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$

Para transformar uma disposição Y em uma disposição Δ, aplicamos:

Transformação $Y \rightarrow \Delta$

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}, \tag{22}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_c}, \tag{23}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_a}, \tag{24}$$

Transformação $Y \rightarrow \Delta$ (Caso particular em que $R_a = R_b = R_c = \bar{R}$)

$$R_1 = R_2 = R_3 = 3\bar{R}, \tag{25}$$

Exercício 19

- Encontre a resistência equivalente observada nos terminais do circuito da Fig. 25. **Resposta**: $R_T = 34\ \text{k}\Omega$.

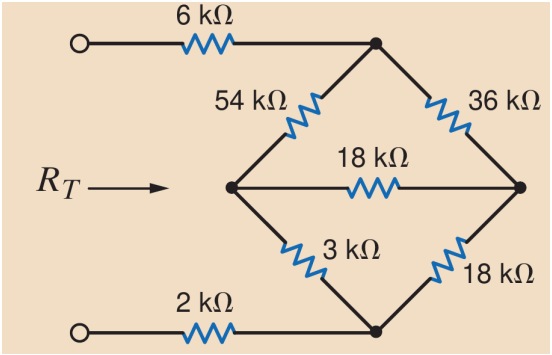


Figura 25: Circuito do exercício 19.

Exercício 20

- Encontre o valor de V_o no circuito da Fig. 26. **Resposta**: $V_o = 24$ V.

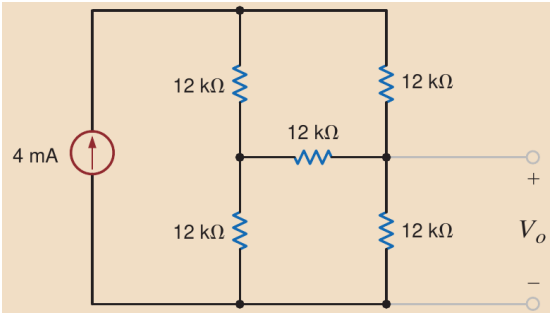


Figura 26: Circuito do exercício 20.

Exercício 21

- Encontre o valor de V_o no circuito da Fig. 27. **Resposta**: $V_o = 3.43$ V.

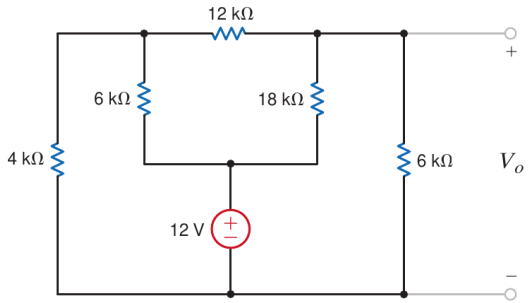


Figura 27: Circuito do exercício 21.

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Circuitos Resistivos

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Análise Nodal e Malha

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

Sumário

1. Método do Escalonamento
   - Exemplo 2×2
   - Exemplo 3×3
2. Análise Nodal
   - Circuitos com Fontes Independentes de Corrente
   - Circuitos com Fontes Dependentes de Corrente
   - Circuitos com Fontes Independentes de Tensão
     - Circuitos com Fonte de Tensão Conectada ao Terra
     - Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra
   - Circuitos com Fontes Dependentes de Tensão
3. Análise de Malha
   - Circuitos com Fontes Independentes de Tensão
   - Circuitos com Fontes Independentes de Corrente
   - Circuitos com Fontes Dependentes
4. Observações Finais

Método do Escalonamento

Método de Escalonamento

- Como veremos a seguir, as **análises de malha e nodal** consistem em **transformar o circuito em um sistema linear de equações**
- Diversos métodos são propostos para **solucionar sistemas de equações lineares**
- O **método de escalonamento (ou eliminação gaussiana)** transforma um sistema linear em um **sistema triangular equivalente**, mais fácil de resolver
- O objetivo do método é transformar a matriz do sistema em uma **matriz triangular escalonada**
- Este método é **aplicável a qualquer sistema linear**

Método de Escalonamento

- Objetivo: encontrar o **conjunto de soluções do sistema linear**
- O **método do escalonamento** transforma o sistema em uma **forma triangular superior**
- No **método do escalonamento**, são permitidas **três operações fundamentais**:
  1. Trocar duas linhas: $L_i \leftrightarrow L_j$
  2. Multiplicar uma linha por escalar não-nulo: $L_i \leftarrow cL_i,\ c \neq 0$
  3. Somar múltiplo de uma linha a outra: $L_j \leftarrow L_j + \alpha L_i$

Exemplo 2×2

Exemplo de solução de um sistema 2×2

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -8 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -8 \end{array}\right]$$

Exemplo 2×2

Exemplo de solução de um sistema 2×2

Passo 1: Permutar linhas para melhor pivô

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -8 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Passo 2: Eliminar abaixo do pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 21 \end{array}\right]$$

Exemplo 2×2

Exemplo de solução de um sistema 2×2

Matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Logo, temos que $y = 3$ e $x - 3(3) = -8 \rightarrow x = 1$

Exemplo 3×3

Exemplo de solução de um sistema 3×3

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

Exemplo 3×3

Exemplo de solução de um sistema 3×3

Pivô $a_{11} = 1$:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

Nova matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Exemplo 3×3

Exemplo de solução de um sistema 3×3

Pivô $a_{22} = -3$:

$$L_2 \leftarrow L_2/(-3)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2$$

Matriz resultante:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Exemplo 3×3

Exemplo de solução de um sistema 3×3

Matriz escalonada completa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Substituição regressiva:

$$\begin{aligned} z &= 2 \\ y &= 5 - 2 = 3 \\ x &= 8 - 2(3) - 2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Análise Nodal

Análise Nodal

- A **análise nodal** fornece um procedimento geral para **analisar circuitos usando tensões de nó como variáveis do circuito**
- Na análise nodal, estamos interessados em encontrar as **tensões dos nós**
- Para um circuito com N nós, a análise nodal é aplicada seguindo os **seguintes passos**:
  1. Selecione um nó como nó de referência. Atribua tensões $v1, v2, \cdots, v_{n-1}$ aos $n-1$ nós restantes. As tensões são referenciadas em relação ao nó de referência;
  2. Aplique a LKC a cada um dos $n-1$ nós não referenciais. Use a lei de Ohm para expressar as correntes de ramo em termos de tensões de nó;
  3. Resolva as equações simultâneas resultantes para obter as tensões de nó desconhecidas.

Análise Nodal

- Um nó específico é escolhido como **referência** (geralmente chamado de **terra**)
- Todas as tensões são medidas em **relação ao terra** do circuito
- Por convenção, assume-se inicialmente que as **tensões são positivas** em relação ao terra e o **terra é fixado com potencial nulo**
- O **resultado da análise** indicará se alguma tensão é **efetivamente negativa**

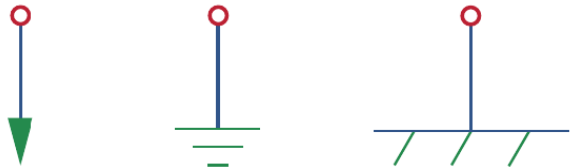


Figura 1: Símbolos usados para o nó de referência (terra).

Análise Nodal

- A metodologia da análise nodal consiste no **equacionamento do circuito** para resolver as tensões nodais
- Este equacionamento é feito por meio da **lei de Kirchhoff das correntes (LKC)**
- O objetivo da análise nodal é **transformar o circuito** em um **sistema de equações lineares**, com as **variáveis ocultas** representando as **tensões nodais**
- Em um circuito com N nós, $N-1$ **equações linearmente independentes** podem ser encontradas por meio da LKC
- Estas $N-1$ equações são **necessárias** para **determinar as** $N-1$ **tensões nodais**

Análise Nodal

- Sabendo que a corrente positiva em um resistor flui do maior potencial para o menor potencial, podemos **relacionar as correntes com as tensões nodais** por meio de:

Corrente no resistor entre os nós m e n

$$i = \frac{v_m - v_n}{R} \tag{2}$$

Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

- O circuito contém $N = 3$ nós e $N - 1 = 2$ tensões nodais desconhecidas (v_1 e v_2)
- São necessárias $N - 1 = 2$ equações para resolver o conjunto de tensões nodais

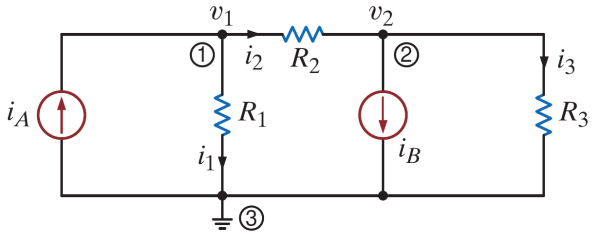


Figura 2: Análise nodal em um circuito com fontes independentes de corrente.

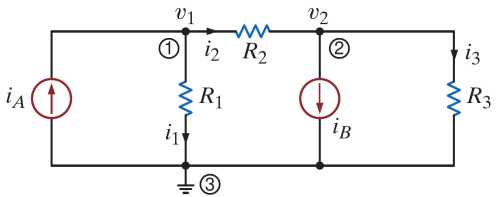
Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

LKC no nó (1)

$$i_1 + i_2 - i_A = 0 \tag{3}$$

ou

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = i_A \longleftrightarrow \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 = i_A \tag{4}$$



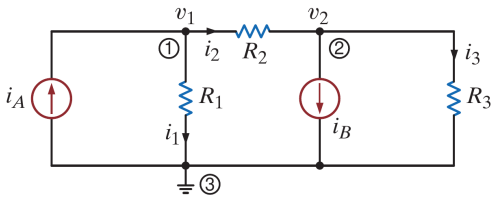
Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

LKC no nó (2)

$$-i_2 + i_B + i_3 = 0 \tag{5}$$

ou

$$-\frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_3} = -i_B \longleftrightarrow -\frac{1}{R_2}v_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)v_2 = -i_B \tag{6}$$

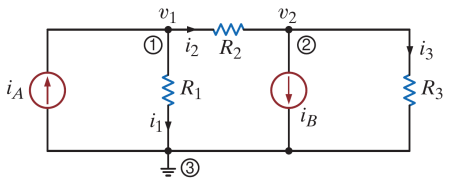


Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

- Temos $N - 1 = 2$ equações linearmente independentes compondo um sistema linear

Sistema de equações nodais

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{1}{R_2} v_2 = i_A \\ -\frac{1}{R_2} v_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 = -i_B \end{cases} \tag{7}$$



Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

- A **solução do sistema** consiste em determinar as **tensões nodais desconhecidas** v_1 e v_2
- Para solucionar este sistema, pode-se aplicar **qualquer técnica conveniente** (**método do escalonamento, método de Gauss-Jordan, etc.**)

Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

- Vamos assumir que:
  - $R_1 = 12\ \text{k}\Omega$
  - $R_2 = 6\ \text{k}\Omega$
  - $R_3 = 6\ \text{k}\Omega$
  - $i_A = 1\ \text{mA}$
  - $i_B = 4\ \text{mA}$
- Com isso, a equação matricial se torna

Equação Matricial do Circuito

$$\begin{bmatrix} 0.25 \times 10^{-3} & -0.166 \times 10^{-3} \\ -0.166 \times 10^{-3} & 0.33 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

- Considerando o método do escalonamento, a matriz escalonada é:

Equação Matricial do Circuito (Escalonada)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4 \\ 0 & 1 & -15 \end{array}\right] \tag{9}$$

Logo, $v_1 = -6$ V e $v_2 = -15$ V.

Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

Exemplo 1

Determine as tensões V_1 e V_2 no circuito da Fig. 3.

Resposta: $V_1 = 15$ V e $V_2 = -3$ V.

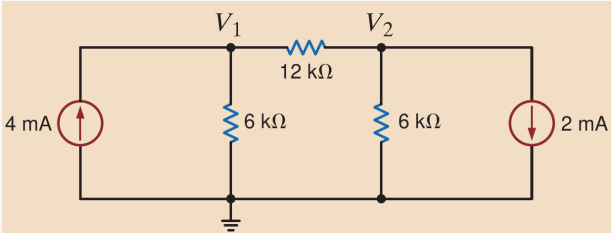


Figura 3: Circuito do Exercício 1.

Circuitos com Fontes Dependentes de Corrente

- O circuito contém $N = 4$ nós e $N - 1 = 3$ tensões nodais desconhecidas (v_1, v_2 e v_3)
- São necessárias $N - 1 = 3$ equações para resolver o conjunto de tensões nodais

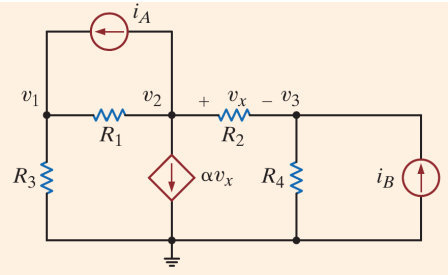
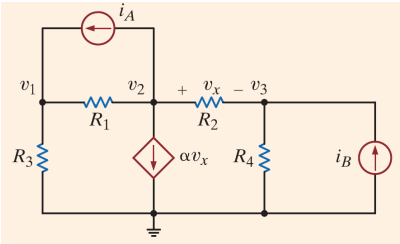


Figura 4: Análise nodal em um circuito com fontes dependentes de corrente.

Circuitos com Fontes Dependentes de Corrente

Sistema de equações nodais

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+\alpha+\frac{1}{R_2}\right) & -\left(\alpha+\frac{1}{R_2}\right) \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_A \\ i_B \end{bmatrix} \tag{10}$$



Circuitos com Fontes Independentes de Tensão

- A aplicação da análise nodal em circuitos com **fontes independentes de tensão** possui algumas **particularidades**
- Dois casos são de interesse:
  - **Caso 1**: Fonte de tensão conectada ao terra
  - **Caso 2**: Fonte de tensão não conectada ao terra
- No caso em que uma fonte de tensão não está conectada ao terra, deve-se aplicar o conceito de **supernó**

Circuitos com Fonte de Tensão Conectada ao Terra

- Considere o circuito da Fig. 6, que possui **fontes de tensão independentes conectadas ao terra**

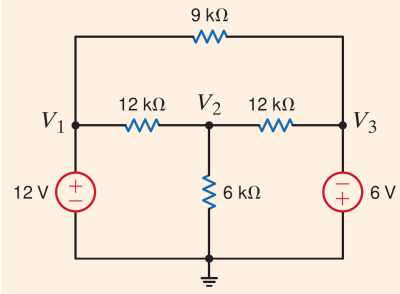
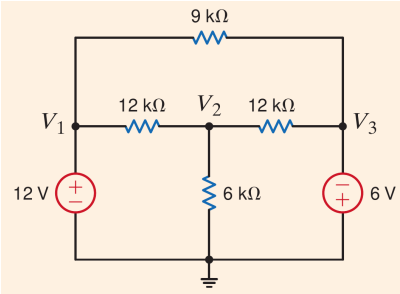


Figura 6: Circuito com fontes de tensão conectadas ao terra.

Circuitos com Fonte de Tensão Conectada ao Terra

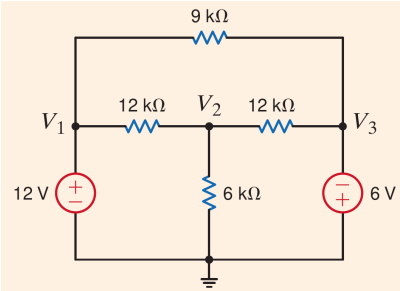
- Observe que as tensões nodais V_1 e V_3 **são determinadas pelas fontes de tensão**: $V_1 = 12$ V e $V_3 = -6$ V



Circuitos com Fonte de Tensão Conectada ao Terra

- A **corrente** que circula pelo resistor de 9 kΩ é:

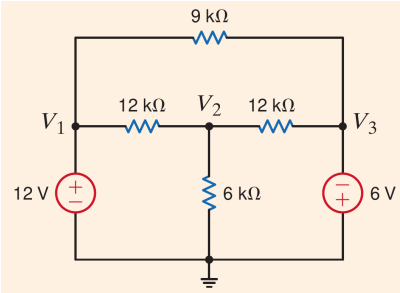
$$\frac{V_1 - V_3}{9\ \text{k}\Omega} = \frac{[12 - (-6)]}{9\ \text{k}} = 2\ \text{mA} \qquad (11)$$



Circuitos com Fonte de Tensão Conectada ao Terra

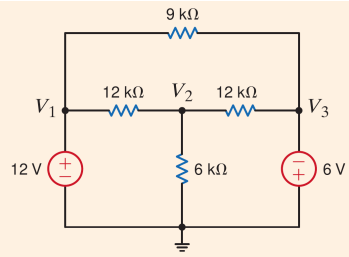
- Para determinar V_2, basta **uma única equação nodal**
- Aplicando a LKC no **nó central**:

$$\frac{V_2 - 12}{12\ \text{k}} + \frac{V_2}{6\ \text{k}} + \frac{V_2 - (-6)}{12\ \text{k}} = 0 \implies V_2 = ?\ \text{V} \qquad (12)$$



Circuitos com Fonte de Tensão Conectada ao Terra

- Neste exemplo, as fontes de tensão ligadas ao terra **simplificam o problema**
- As duas fontes **eliminam a necessidade de resolver duas equações nodais**
- Com isso, restou apenas a tensão nodal V_2 para ser determinada



Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

- Considere o circuito da Fig. 7, que possui uma **fonte de tensão conectada entre dois nós** sendo que **nenhum deles é o terra**
- Até então, determinamos as correntes nos ramos pela **razão entre as tensões terminais e a resistência do ramo** (Lei de Ohm)
- Entretanto, **não é possível aplicar essa relação no ramo com a fonte de tensão**

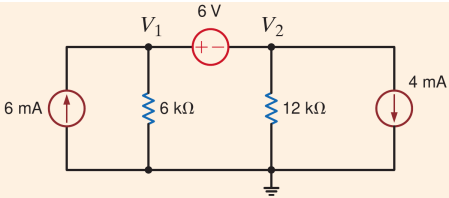
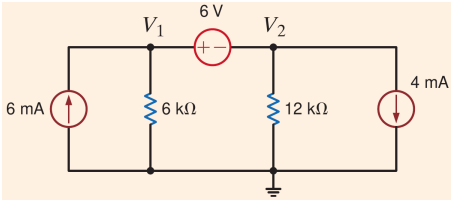


Figura 7: Circuito com fonte de tensão desconectada do terra.

Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

- Este circuito possui $N = 3$ nós e para resolvê-lo, **precisamos de $N - 1 = 2$ equações linearmente independentes**
- **Aplicando a LKT** na malha central, obtemos $V_1 - V_2 = 6$ V
- A diferença de potencial entre os nós é **determinada pela fonte de tensão**



Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

- Para resolver este problema, devemos aplicar o conceito de **supernó**
- Um supernó é formado **envolvendo uma fonte de tensão (dependente ou independente) conectada entre dois nós que não são o terra**
- Aplica-se a **LKC ao supernó** de forma análoga à aplicada a um nó comum

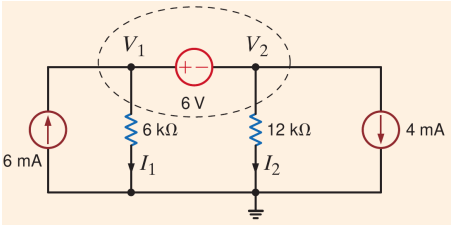


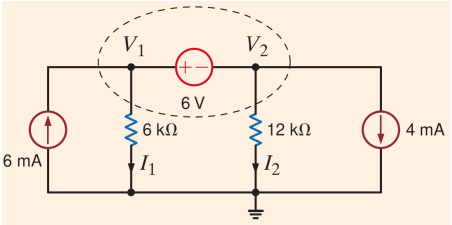
Figura 8: Aplicação de um supernó na fonte de tensão.

Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

- Aplicando a LKC ao supernó, obtemos:

LKC no supernó

$$-6 \times 10^{-3} + \frac{V_1}{6\,\text{k}} + \frac{V_2}{12\,\text{k}} + 4 \times 10^{-3} = 0 \tag{13}$$



Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

- Com isso, obtemos as $N - 1$ equações necessárias para resolver o circuito:

Sistema de Equações do Circuito

$$V_1 - V_2 = 6\,\text{V}, \tag{14}$$

$$-6 \times 10^{-3} + \frac{V_1}{6\,\text{k}} + \frac{V_2}{12\,\text{k}} + 4 \times 10^{-3} = 0 \tag{15}$$

Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

- A fonte de tensão dentro do supernó fornece uma **equação de restrição necessária** para determinar as tensões nodais
- Um supernó, em sua totalidade, **não possui uma tensão nodal própria**
- Um supernó requer a **aplicação conjunta da LKC e da LKT**

Circuitos com Fontes Dependentes de Tensão

- Para circuitos com **fontes dependentes de tensão**, o procedimento é análogo ao caso com fontes independentes:
  - **Caso 1**: Fonte dependente de tensão conectada ao terra $\rightarrow$ Simplificação das tensões nodais
  - **Caso 2**: Fonte dependente de tensão desconectada do terra $\rightarrow$ Aplicação do supernó

Circuitos com Fonte de Tensão Desconectada do Terra

Exemplo 2

Determine a corrente I_o no circuito da Fig. 9.

Resposta: $\frac{3}{8}$ mA.

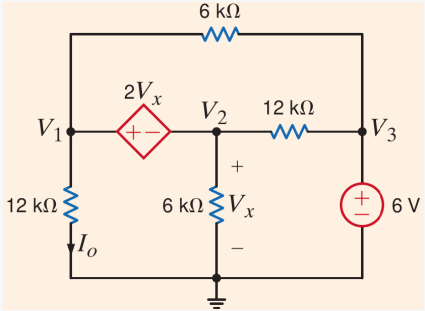


Figura 9: Circuito com fonte de tensão dependente desconectada do terra.

Análise de Malha

Análise de Malha

- Na **análise de malha**, aplica-se a LKT para determinar um conjunto de **correntes de malha**
- Após o cálculo dessas correntes, aplica-se a **Lei de Ohm** para determinar qualquer tensão no circuito
- Para um circuito com B **ramos**, pode-se demonstrar que existem $B-N+1$ **equações linearmente independentes** que podem ser usadas para resolver o problema, onde N é o número de nós do circuito

Análise de Malha

- O circuito da Fig. 10 possui $B = 8$ **ramos e** $N = 5$ **nós**
- São necessárias $B - N + 1 = 4$ **equações linearmente independentes** para determinar todas as correntes do circuito

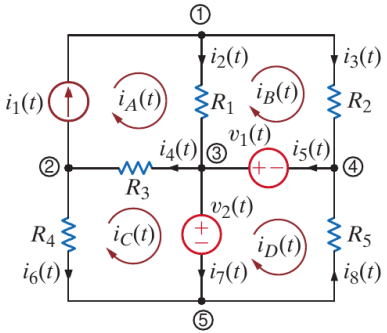
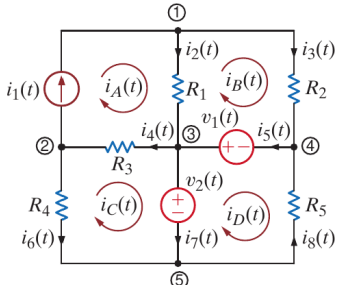


Figura 10: Circuito com correntes de malha.

Análise de Malha

Correntes de Malha

$$
\begin{aligned}
&i_1(t) = i_A(t), \;\; i_2(t) = i_A(t) - i_B(t) \\
&i_3(t) = i_B(t), \;\; i_4(t) = i_A(t) - i_C(t) \\
&i_5(t) = i_B(t) - i_D(t), \;\; i_6(t) = -i_C(t) \\
&i_7(t) = i_C(t) - i_D(t), \;\; i_8(t) = -i_D(t)
\end{aligned}
\tag{16}
$$



Circuitos com Fontes Independentes de Tensão

- O circuito da Fig. 11 possui $B = 7$ **ramos e** $N = 6$ **nós**
- São necessárias $B - N + 1 = 2$ **equações linearmente independentes** para determinar todas as correntes do circuito

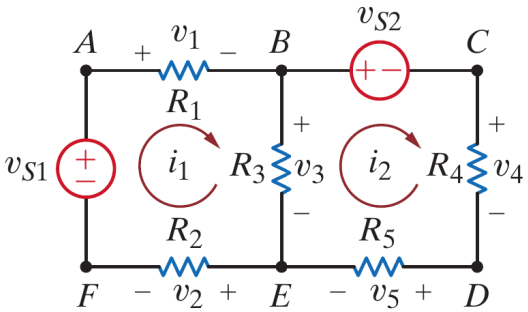


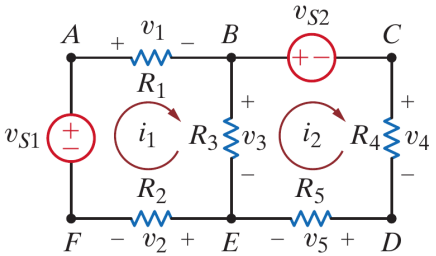
Figura 11: Circuito com correntes de malha.

Circuitos com Fontes Independentes de Tensão

LKT na Malha (1)

$$-v_{S1} + v_1 + v_3 + v_2 = 0 \longrightarrow i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 + i_1 R_2 = v_{S1} \quad (17)$$

$$i_1(R_1 + R_2 + R_3) - i_2(R_3) = v_{S1} \quad (18)$$

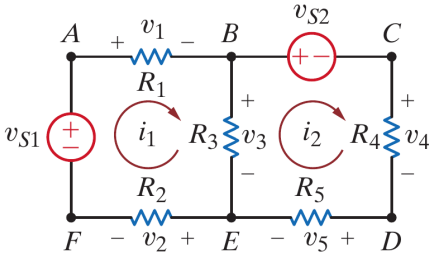


Circuitos com Fontes Independentes de Tensão

LKT na Malha (2)

$$-v_3 + v_{S2} + v_4 + v_5 = 0 \longrightarrow -(i_1 - i_2)R_3 + i_2(R_4) + i_2(R_5) = -v_{S2} \quad (19)$$

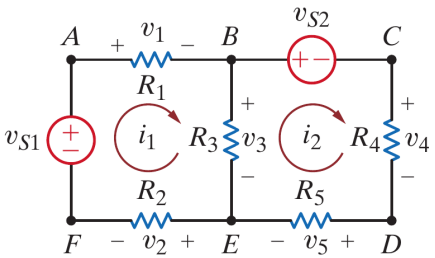
$$-(R_3)i_1 + (R_3 + R_4 + R_5)i_2 = -v_{S2} \quad (20)$$



Circuitos com Fontes Independentes de Tensão

Matriz do Sistema

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{S1} \\ -v_{S2} \end{bmatrix} \tag{21}$$



Exemplo

- Determine as correntes de malha I_1, I_2 e I_3 no circuito da Fig. 12.
  Resposta: $I_1 = -0,6757$ mA, $I_2 = 0,4685$ mA e $I_3 = -0,1261$ mA.

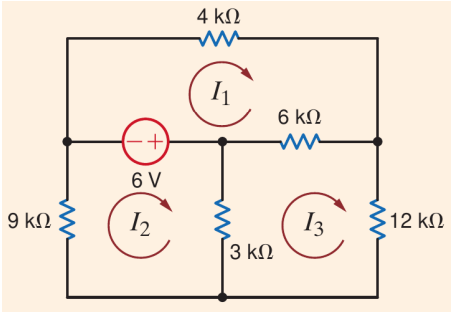


Figura 12: Circuito com correntes de malha.

Exemplo

- Determine a tensão V_o no circuito da Fig. 13. **Resposta**: $V_o = 8,96$ V.

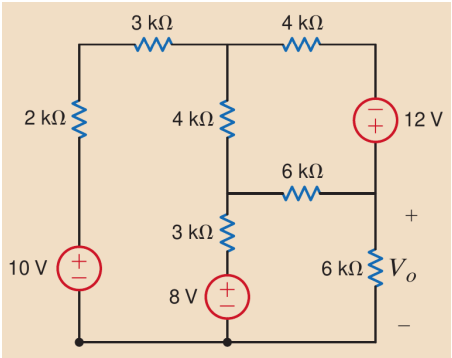


Figura 13: Exemplo de aplicação da análise de malha.

Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

- A **análise de malha** torna-se **mais simples** quando o circuito possui **fontes independentes de corrente**
- A fonte de corrente **estabelece uma relação direta com as correntes de malha**

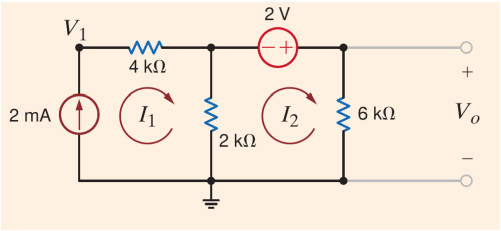


Figura 14: Circuito com uma fonte independente de corrente.

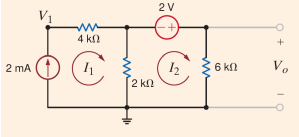
Circuitos com Fontes Independentes de Corrente

Relação de I_1 com a fonte de corrente

$$I_1 = 2 \text{ mA} \tag{22}$$

LKT na Malha (2)

$$2\text{k}(I_2 - I_1) - 2 + 6\text{k}I_2 = 0 \tag{23}$$



Circuitos com Fontes de Corrente

- Quando o circuito contém **fontes de corrente que são compartilhadas entre duas malhas**, devemos aplicar o conceito de **supermalha**
- Com base na **supermalha**, **excluímos a fonte de corrente** e qualquer **elemento em série** e **unimos as malhas que se interseccionam**

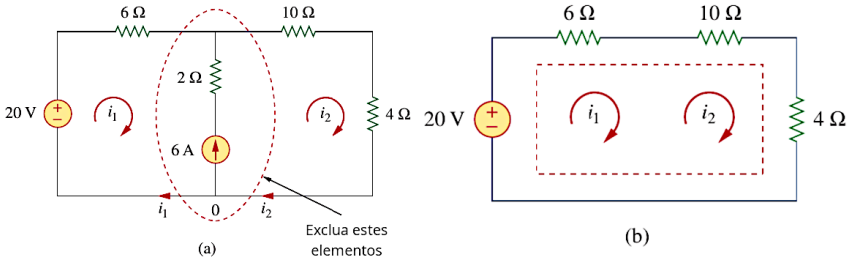
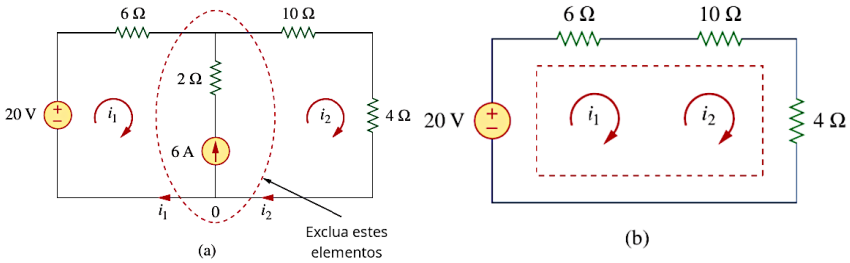


Figura 15: Ilustração da aplicação da supermalha.

Circuitos com Fontes de Corrente

Primeira equação de malha (Relação entre i_1 e i_2)

$$i_2 - i_1 = 6 \text{ A}. \tag{24}$$



Circuitos com Fontes de Corrente

- Caso o circuito contenha **múltiplas fontes de corrente entre malhas**, pode-se criar uma **única supermalha que interseccione toda a região** (se for aplicável)

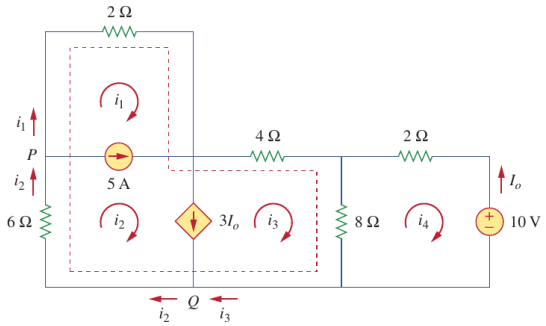


Figura 16: Ilustração da intersecção de múltiplas supermalhas.

Exemplo

- Determine a tensão V_o no circuito da Fig. 17. **Resposta**: $V_o = 9,71$ V.

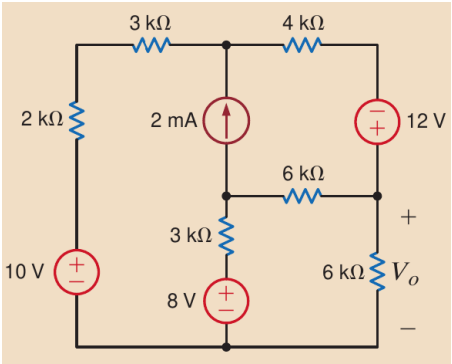


Figura 17: Exemplo de circuito com fonte independente de corrente.

Circuitos com Fontes Dependentes

- A análise de malha aplicada a **circuitos com fontes dependentes** segue o mesmo princípio dos casos anteriores
- Entretanto, é necessário **relacionar a tensão ou corrente de controle com as correntes de malha**

Exemplo

- Determine a tensão V_o no circuito da Fig. 18. **Resposta**: $V_o = 6,97$ V.

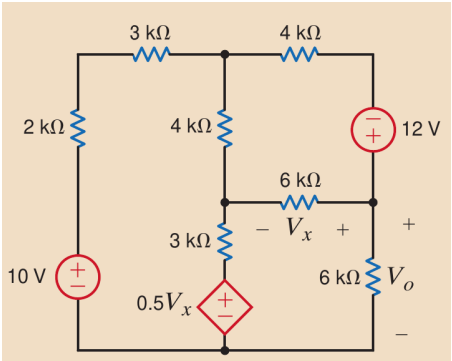


Figura 18: Exemplo de circuito com fonte dependente de tensão.

Exemplo

- Determine a tensão V_o no circuito da Fig. 19. **Resposta**: $V_o = 9$ V.

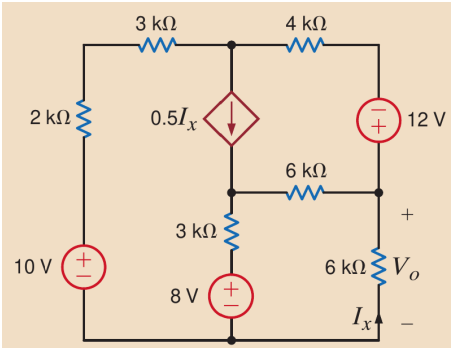


Figura 19: Exemplo de circuito com fonte dependente de tensão.

Observações Finais

- A **escolha adequada entre os métodos de análise** pode **reduzir** consideravelmente a **complexidade do problema**
- Um circuito com N nós requer $N-1$ equações linearmente independentes para ser resolvido por meio da análise nodal
- Um circuito com N nós e B ramos requer $B-N+1$ equações linearmente independentes para ser resolvido por meio da análise de malha
- Os **componentes e a disposição do circuito** também devem ser analisados criteriosamente

Observações Finais

- Quantas malhas e nós este circuito possui?
- Qual análise (nodal ou de malha) simplifica a solução deste circuito?

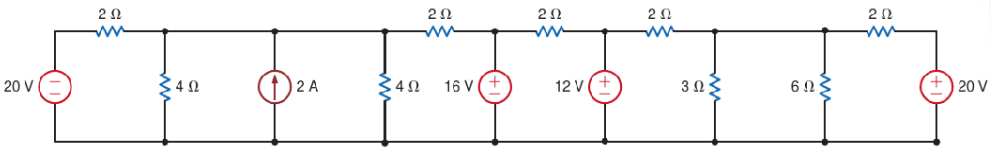


Figura 20: Qual análise aplicar neste circuito?

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Análise Nodal e Malha

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Técnicas Adicionais de Análise

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

Sumário

1. Equivalência de Circuitos
2. Linearidade
   - Exemplos
3. Superposição
   - Exemplos
4. Teorema de Thévenin
   - Exemplos
5. Teorema de Norton
   - Exemplos
6. Transformação de Fontes
7. Máxima Transferência de Potência

Técnicas Adicionais de Análise

Equivalência de Circuitos

- As **leis fundamentais** que regem a **análise de circuitos** são:
  - Lei de Ohm
  - Lei de Kirchhoff das tensões
  - Lei de Kirchhoff das correntes
  - Lei de Tellegen
- As técnicas de **análise nodal** e de **análise de malha** são **consequências dessas leis fundamentais**
- Outra consequência direta das leis fundamentais são as **equivalências entre circuitos**
- Ao longo desta disciplina, **já aplicamos** essas equivalências de forma direta ou indireta

Equivalência de Circuitos

- A **forma de equivalência** mais aplicada foi a **equivalência entre resistores**:
  - Equivalência em série
  - Equivalência em paralelo

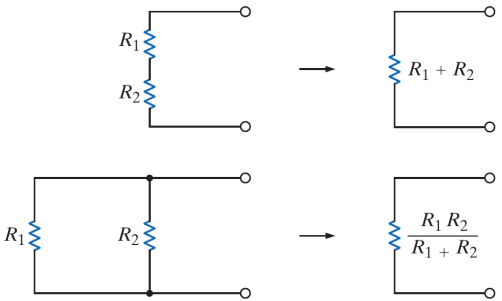


Figura 1: Equivalências de resistores em série e em paralelo.

Equivalência de Circuitos

- Também podemos fazer uma **equivalência** entre **fontes de tensão em série**
- Considerando o diagrama da Fig. 2, a aplicação da **LKT na malha** indica que a **tensão nos terminais** é expressa por:

$$V_{ab} + V_2 - V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ab} = V_1 - V_2 \tag{1}$$

- Logo, podemos **substituir** as fontes de tensão em série por **uma única fonte, com tensão igual a** $V_1 - V_2$

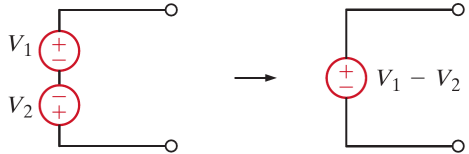


Figura 2: Equivalência de fontes de tensão em série

Equivalência de Circuitos

- Também podemos fazer uma **equivalência** entre **fontes de corrente em paralelo**
- Considerando o diagrama da Fig. 3, a aplicação da **LKC no nó superior** indica que a **corrente líquida que sai do nó** é expressa por:

$$-I_o + I_2 - I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_o = I_1 - I_2 \tag{2}$$

- Logo, podemos **substituir** as fontes de corrente em paralelo por **uma única fonte com corrente igual a** $I_1 - I_2$

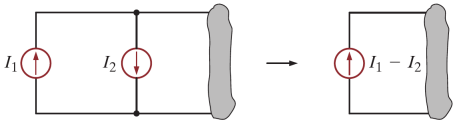


Figura 3: Equivalência de fontes de corrente em paralelo

Linearidade

- Nesta disciplina, analisamos apenas **circuitos com propriedades lineares**
- Isto implica que os circuitos avaliados são **lineares**, obedecendo a **dois princípios essenciais**:
  - **Homogeneidade**: se uma entrada $x(t)$ produz uma saída $y(t)$, então uma entrada escalonada $kx(t)$ produzirá uma saída escalonada $ky(t)$, em que k é uma constante qualquer
  - **Aditividade**: se $x_1(t)$ produz uma saída $y_1(t)$ e $x_2(t)$ produz uma saída $y_2(t)$, então a entrada $x_1(t) + x_2(t)$ produzirá a saída $y_1(t) + y_2(t)$
- Estas propriedades **só são estritamente satisfeitas** quando o circuito é **composto apenas por elementos lineares**
- Podemos aplicar as **propriedades da linearidade** para **solucionar circuitos**

Linearidade - Exemplo 1

- Podemos resolver o circuito abaixo aplicando a propriedade da **homogeneidade**
- **Exemplo 1**: Aplique as propriedades da linearidade para determinar I_o no circuito abaixo, assumindo inicialmente que $I_o = 1$ mA e sabendo que $I = 6$ mA.
  Resposta: $I_o = 3$ mA.

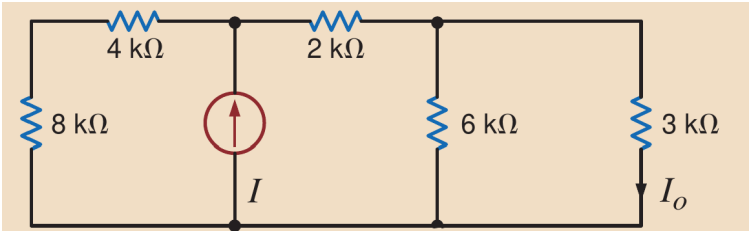


Figura 4: Circuito do exemplo 1.

Linearidade - Exemplo 2

- **Exemplo 2**: Aplique as propriedades da linearidade para determinar V_0 no circuito abaixo, assumindo inicialmente que a fonte é de 1 V.
  Resposta: $V_0 = 5/3$.

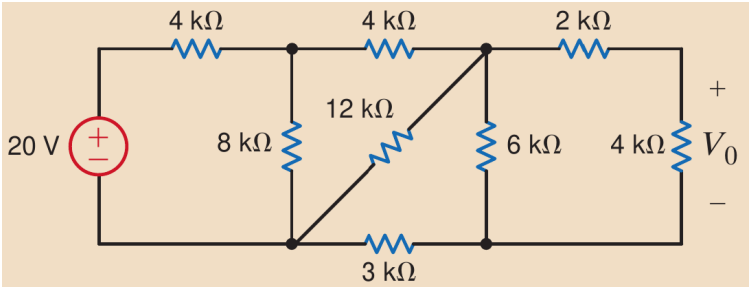


Figura 5: Circuito do exemplo 2.

Superposição

- O **princípio da superposição** é uma consequência direta da **propriedade da aditividade**
- A partir da **propriedade da aditividade**, concluímos que podemos reduzir um **circuito complexo com múltiplas fontes** em múltiplos **circuitos mais simples contendo apenas uma fonte**
- De acordo com o **princípio da superposição**, temos que:

> **Princípio da Superposição**
> Em qualquer circuito linear contendo múltiplas fontes independentes, a corrente ou a tensão em qualquer ponto da rede pode ser calculada como a soma algébrica das contribuições individuais de cada fonte atuando isoladamente

Superposição

- Na determinação da **contribuição de uma dada fonte independente**, todas as **outras fontes do circuito devem ser anuladas**
- Para **anular a contribuição das fontes**:
  - **Fontes de tensão independentes**: substituir por um **curto-circuito**
  - **Fontes de corrente independentes**: substituir por um **circuito aberto**
- Apesar de o **princípio da superposição** ser válido para qualquer circuito linear, **não é útil** nos casos em que o **circuito possui fontes dependentes**
- As **fontes dependentes não podem ser efetivamente anuladas**, dado que dependem de tensões e correntes de outros pontos do circuito

Superposição

- Sendo assim, a **solução de circuitos** por meio do **método da superposição** segue os **seguintes passos**:
  1. Em um circuito contendo múltiplas fontes independentes, cada fonte pode ser aplicada independentemente, com as demais fontes anuladas
  2. Para anular a contribuição de uma **fonte de tensão**, substitua-a por um **curto-circuito**, e para anular a contribuição de uma **fonte de corrente**, substitua-a por um **circuito aberto**
  3. Quando as fontes individuais são aplicadas ao circuito, todas as leis e técnicas de análise que aprendemos podem ser utilizadas para obter uma solução
  4. Os resultados obtidos pela aplicação independente de cada fonte são então somados algebricamente para obter a solução final

Superposição - Exemplo 3

- **Exemplo 3**: Determine a tensão V_o no circuito da Fig. 6 usando o principio da superposição.
  Resposta: $V_o = 4/3$ V.

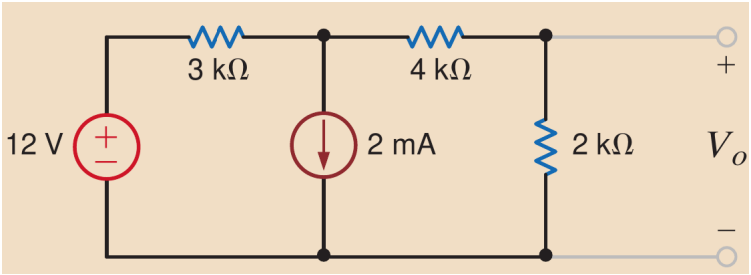


Figura 6: Circuito do exemplo 3.

Superposição - Exemplo 4

- **Exemplo**: Determine a tensão V_0 no circuito da Fig. 7 usando o principio da superposição.
  Resposta: $V_0 = 5.6$ V.

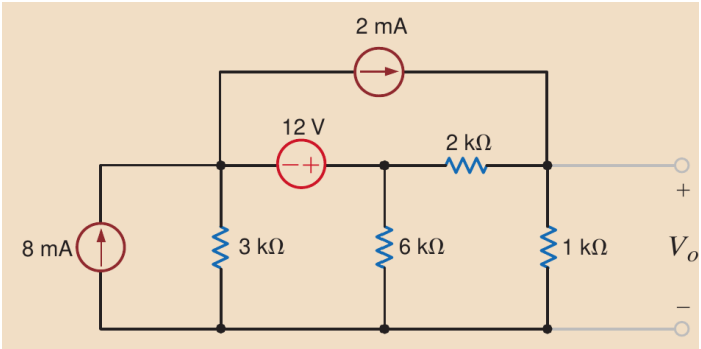


Figura 7: Circuito do exemplo 4.

Superposição - Exemplo 5

- **Exemplo**: Determine a corrente I_0 no circuito da Fig. 8 usando o principio da superposição.
  Resposta: $I_0 = -2/3$ mA.

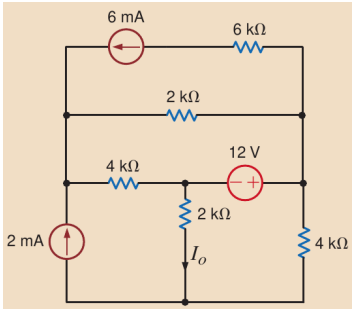


Figura 8: Circuito do exemplo 5.

Teorema de Thévenin

- Na prática, ocorre frequentemente que um elemento específico de um circuito é **variável** (geralmente chamado de **carga**), enquanto outros elementos são fixos
- Como exemplo típico, um terminal de **tomada residencial** pode ser conectado a **diferentes aparelhos**, constituindo uma **carga variável**
- Considerando as técnicas de análise que estudamos até então, cada vez que o **elemento variável** é alterado, todo o **circuito tem que ser analisado novamente**
- Para evitar este problema, o teorema de Thévenin fornece uma técnica pela qual a **parte fixa do circuito** é substituída por um **circuito equivalente**

Teorema de Thévenin

Teorema de Thévenin

Um circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente que consiste em uma fonte de tensão V_{th} em série com um resistor R_{th}, onde V_{th} é a tensão de circuito aberto nos terminais e R_{th} é a resistência de entrada ou equivalente nos terminais quando as fontes independentes são desligadas

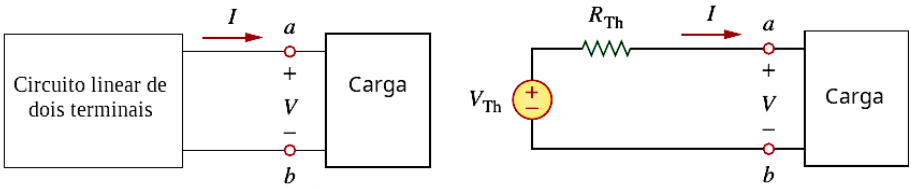
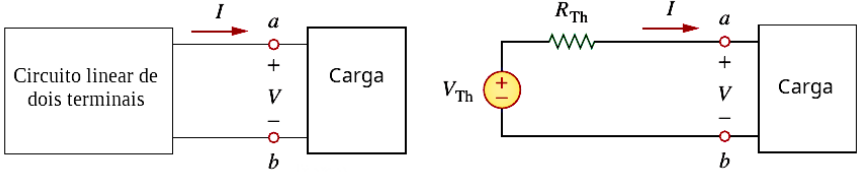


Figura 9: Substituição de um circuito por seu equivalente de Thévenin.

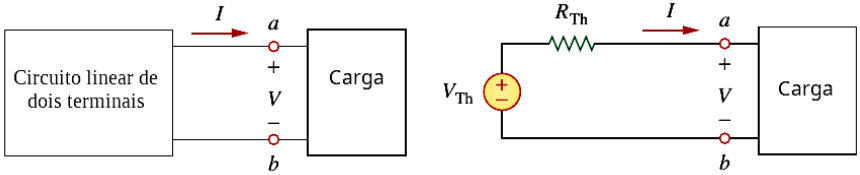
Teorema de Thévenin

- Logo, podemos **substituir um circuito entre terminais** pelo **circuito equivalente de Thévenin**
- Para determinar o equivalente de Thévenin, devemos encontrar a **tensão** V_{th} e a **resistência** R_{th}
- Dois circuitos são considerados equivalentes se eles têm a **mesma relação tensão-corrente em seus terminais**
- Vamos assumir que os dois circuitos abaixo são **equivalentes**



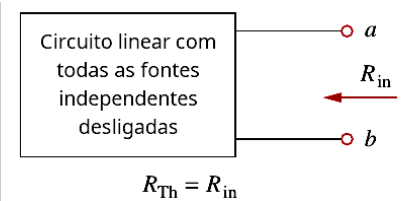
Teorema de Thévenin

- Se os terminais a-b forem **abertos (removendo a carga)**, nenhuma corrente flui, de modo que a **tensão de circuito aberto** nos terminais $a - b$ deve ser **igual à fonte de tensão** V_{th}
- Logo, V_{th} é igual a **tensão de circuito aberto entre os terminais**



Teorema de Thévenin

- Com a carga desconectada e os terminais $a - b$ em circuito aberto, **desligamos todas as fontes independentes**
- A **resistência de entrada** (ou resistência equivalente) do circuito desligado entre os terminais $a - b$ **deve ser igual a** R_{th} porque os **dois circuitos são equivalentes**
- Logo, R_{th} é igual a **resistência equivalente vista nos terminais quando as fontes independentes são desligadas**



Teorema de Thévenin

- Em resumo, podemos considerar dois casos na determinação de R_{th}:
- **Caso 1**: Se o circuito não tiver fontes dependentes, desligamos todas as fontes independentes e R_{th} é a resistência equivalente vista entre os terminais
- **Caso 2**: Se o circuito tiver fontes dependentes, desligamos todas as fontes independentes. Assim como na superposição, as fontes dependentes não podem ser desligadas porque são controladas por variáveis do circuito. Aplicamos então uma fonte de tensão V_o entre os terminais $a-b$ e determinamos a corrente resultante I_o. Neste caso, $R_{\text{th}} = V_o/I_o$. Alternativamente, podemos inserir uma fonte de corrente I_o nos terminais $a-b$ e encontrar a tensão terminal V_o. Novamente, $R_{\text{th}} = V_o/I_o$.

Teorema de Thévenin - Exemplo 6

- **Exemplo**: Determine o equivalente de Thévenin e a tensão V_o no circuito da Fig. 13.
  Resposta: $R_{\text{th}} = 5,6\ \text{k}\Omega$, $V_{\text{th}} = 25,6\ \text{V}$, $V_o = 3,88\ \text{V}$.

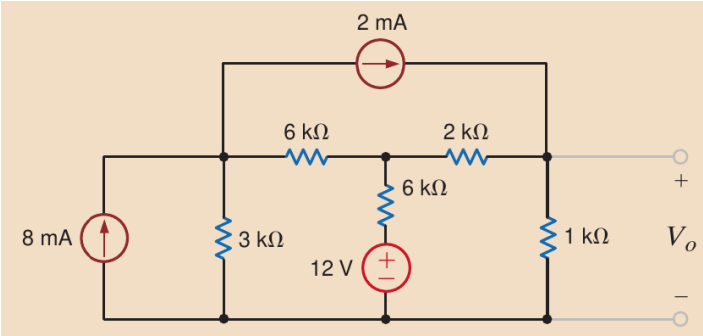


Figura 10: Circuito do exemplo 6.

Teorema de Thévenin - Exemplo 7

- **Exemplo**: Determine o equivalente de Thévenin e a tensão V_o no circuito da Fig. 11.
  Resposta: $R_{\text{th}} = 1,333\ \text{k}\Omega$, $V_{\text{th}} = 14,66\ \text{V}$, $V_o = 6,28\ \text{V}$.

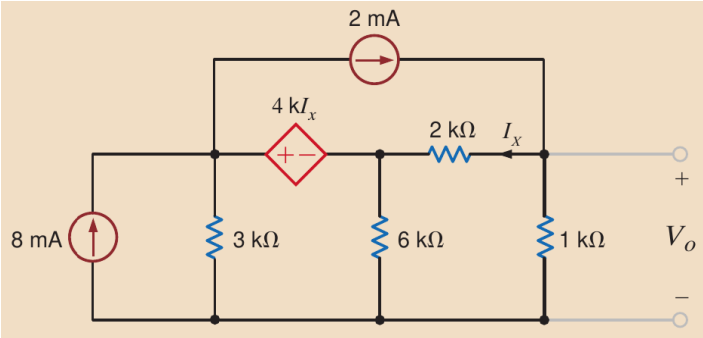


Figura 11: Circuito do exemplo 7.

Teorema de Norton

Teorema de Norton
um circuito linear de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente que consiste em uma fonte de corrente I_N em paralelo com um resistor R_N, onde I_N é a corrente de curto-circuito através dos terminais e R_N é a resistência de entrada ou equivalente nos terminais quando as fontes independentes são desligadas

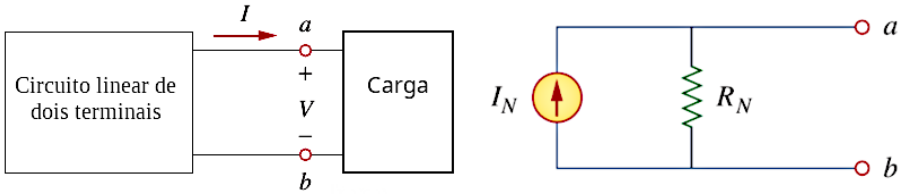


Figura 12: Substituição de um circuito por seu equivalente de Norton.

Teorema de Norton

- A **resistência de Norton** é encontrada da mesma forma que a **resistência de Thévenin**:

Resistência de Norton

$$R_{\mathrm{N}} = R_{\mathrm{th}} \tag{3}$$

- Entretanto, a **corrente de Norton** é calculada com base na **corrente de curto-circuito**
- Para isso, **substituímos a carga por um curto circuito**, e calculamos a **corrente que passa entre os terminais curto circuitados**

Teorema de Norton - Exemplo 8

- **Exemplo**: Determine o equivalente de Norton e a tensão V_o no circuito da Fig. 13.
  Resposta: $R_N = 5,6$ kΩ, $I_N = 4,6$ mA, $V_o = 3,88$ V.

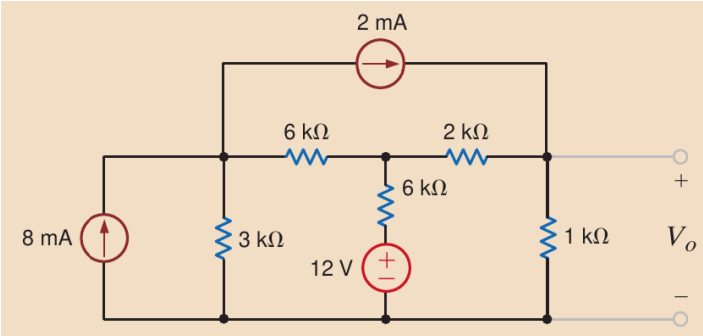
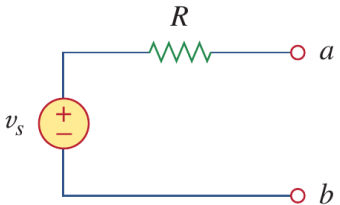


Figura 13: Circuito do exemplo 8.

Transformação de Fontes

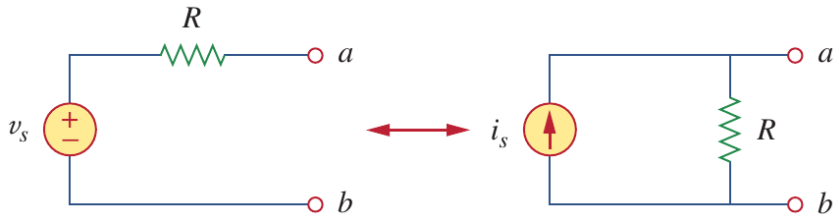
- Considere o circuito abaixo, composto **somente por uma fonte de tensão em série com uma resistência**
- Claramente, o **equivalente de Thévenin** deste circuito é **exatamente igual ao próprio circuito**
- Por sua vez, podemos também encontrar o **equivalente de Norton** deste circuito
- Determinando a corrente de curto circuito, temos que a **corrente de Norton** é $I_N = v_s/R = V_{\text{Th}}/R_{\text{Th}}$



Transformação de Fontes

- Uma **fonte de tensão em série com resistência** equivale a uma **fonte de corrente em paralelo com a mesma resistência**

> **Transformação de Fontes**
>
> $$v_s = i_s R \longleftrightarrow i_s = \frac{v_s}{R} \tag{4}$$
>
> em que v_s se conecta em série com R e i_s se conecta em paralelo com R, como ilustrado na figura abaixo



Máxima Transferência de Potência

- Em muitas situações práticas, um **circuito é projetado** para **fornecer potência a uma carga**
- Existem aplicações em que é desejável **maximizar a potência fornecida a uma carga**
- Dado que **qualquer circuito linear** pode ser representado por um **equivalente de Thévenin (ou Norton)**, podemos usar este artifício para encontrar a **máxima potência que um circuito pode entregar a uma carga**
- Se um circuito qualquer é substituído por seu equivalente de Thévenin com exceção da carga, a potência entre a carga é expressa por:

Potência na carga (Equivalente de Thévenin)

$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} \right)^2 R_L = V_{\text{Th}}^2 \frac{R_L}{(R_{\text{Th}} + R_L)^2}. \tag{5}$$

Máxima Transferência de Potência

- A Fig. 15 apresenta o **perfil da potência absorvida na carga em função da resistência da carga**
- Claramente existe um valor para **resistência da carga** R_{max} que **maximiza a potência absorvida**

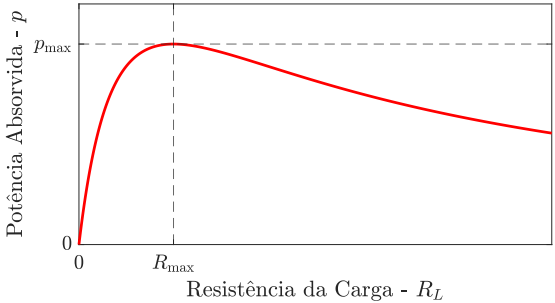


Figura 15: Curva da potência absorvida na carga em função da resistência da carga.

Máxima Transferência de Potência

- Para encontrar o valor da **resistência que maximiza a potência**, derivamos a função de potência em relação a R e igualamos a zero

Resistência da carga que maximiza a potência entregue

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{\text{Th}}^2 \left[\frac{R_{\text{Th}} - R_L}{(R_{\text{Th}} + R_L)^3} \right] = 0, \tag{6}$$

o que resulta em $R_L = R_{\text{Th}}$

- Logo, o circuito entrega a máxima potência para a carga quando a **resistência da carga é igual a resistência de Thévenin**
- Neste caso, a **potência máxima transferida para a carga** é calculada por

Máxima potência transferida

$$p_{\text{max}} = \frac{V_{\text{Th}}^2}{4R_{\text{Th}}} \tag{7}$$

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Técnicas Adicionais de Análise

Prof: Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Amplificadores Operacionais

Prof. Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília

Sumário

1. Amplificadores Operacionais

2. Amplificador Operacional Ideal
   - Amplificador Inversor
   - Amplificador Não Inversor
   - Amplificador Somador
   - Amplificador Diferencial
   - Circuitos em Cascata

Amplificadores Operacionais

Amplificadores Operacionais

- Tendo aprendido as **leis e teoremas básicos para análise de circuitos**, estamos agora prontos para estudar um **elemento ativo** de circuito de suma importância: o **amplificador operacional (Amp Op)**
- O amplificador operacional é uma elemento eletrônico que se comporta como uma **fonte de tensão controlada por tensão**
- Um amplificador operacional pode **somar sinais, amplificar um sinal, integrá-lo ou diferenciá-lo**
- Os amplificadores operacionais são populares em projetos de circuitos práticos porque são **versáteis, baratos e fáceis de usar**

Amplificadores Operacionais

- Um amplificador operacional é projetado para realizar algumas **operações matemáticas** quando **componentes externos são conectados aos seus terminais**
- Consistem internamente de um arranjo complexo de **resistores, transistores e capacitores**

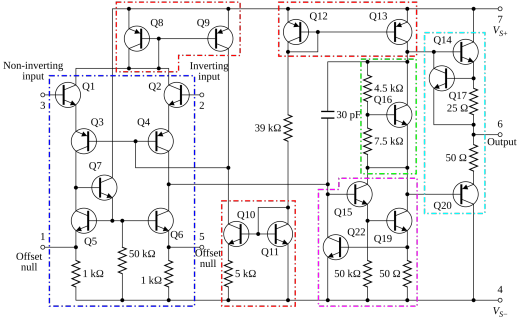


Figura 1: Circuito interno de um amplificador operacional.

Amplificadores Operacionais

- O **símbolo de um amp op** é como representado na figura abaixo:
  - **Terminal (1)**: Entrada inversora
  - **Terminal (2)**: Entrada não inversora
  - **Terminal (3)**: Alimentação positiva
  - **Terminal (4)**: Alimentação negativa
  - **Terminal (5)**: Saída

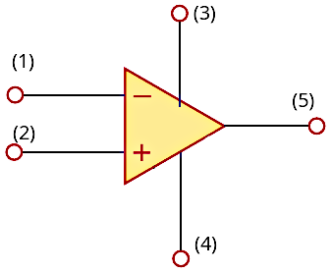


Figura 2: Símbolo de um amplificador operacional.

Amplificadores Operacionais

- Como um **elemento ativo**, o amplificador operacional deve ser **alimentado por uma fonte de tensão**
- Para simplificar, frequentemente **ignoramos os terminais de alimentação** na análise de circuitos com amp ops

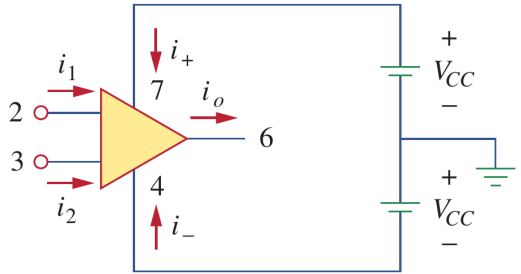


Figura 3: Amplificador operacional com alimentações externas.

Amplificadores Operacionais

- Aplicando a LKC, temos que a **corrente de saída** é expressa por:

$$i_o = \underbrace{(i_+ + i_-)}_{\text{Alimentação}} + \underbrace{(i_1 + i_2)}_{\text{Entradas}} \qquad (1)$$

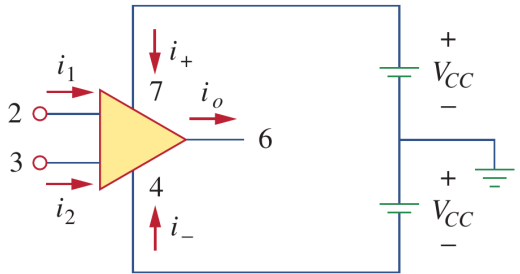


Figura 4: Amplificador operacional com alimentações externas.

Amplificadores Operacionais

- O **modelo simplificado de circuito equivalente** de um amplificador operacional é mostrado na figura abaixo
  - **Resistência de entrada**: R_i
  - **Resistência de saída**: R_o
  - **Ganho de tensão em malha aberta**: A

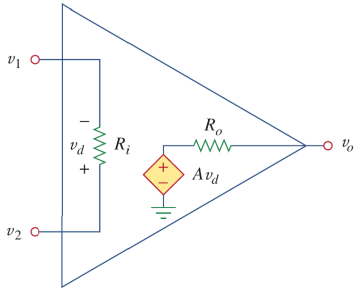


Figura 5: Circuito equivalente de um amplificador operacional.

Amplificadores Operacionais

- A tensão de saída v_o (malha aberta) é dada por:

Tensão de saída (malha aberta)

$$v_o = Av_d = A(v_2 - v_1) \tag{2}$$

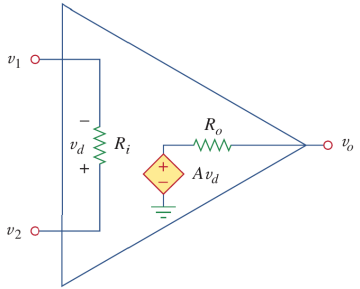


Figura 6: Circuito equivalente de um amplificador operacional

Amplificadores Operacionais

- O conceito de **realimentação** é crucial para a nossa compreensão dos circuitos de amplificadores operacionais
- Uma **realimentação negativa** é obtido quando a **saída é realimentada para o terminal inversor** do amplificador operacional
- Quando há um caminho de **realimentação da saída para a entrada**, a **razão entre a tensão de saída e a tensão de entrada** é chamada de **ganho de malha fechada**

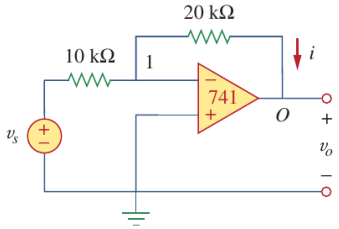


Figura 7: Circuito com realimentação negativa.

Amplificadores Operacionais

- Uma **limitação do amplificador operacional** é que a **magnitude de sua tensão de saída** não pode exceder $|V_{CC}|$
- A **tensão de saída** depende e é limitada pela **tensão de alimentação**

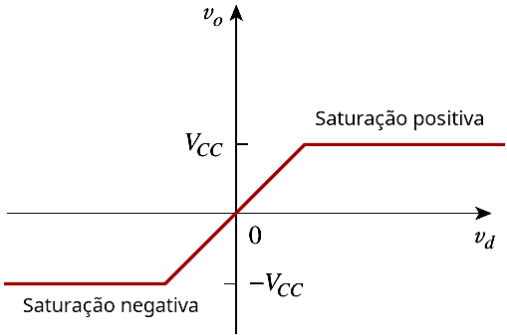


Figura 8: Tensão de saída v_o como uma função da tensão diferencial de entrada v_d em um amp op.

Amplificador Operacional Ideal

- Para facilitar a compreensão dos circuitos de amplificadores operacionais, assumiremos **amplificadores operacionais ideais**
- Um **amplificador operacional é ideal** se tiver as seguintes características:
  - Ganho de malha aberta infinito - $A \to \infty$
  - Resistência de entrada infinita (aberto) - $R_i \to \infty$
  - Resistência de saída nula (curto) - $R_o \approx 0$
- Embora assumir um amplificador operacional ideal forneça apenas uma **análise aproximada**, a maioria dos **amplificadores modernos** tem **ganhos e resistência de entrada tão grandes** que a análise aproximada é suficiente

Amplificador Operacional Ideal

- Se a **resistência de entrada** do amp op ideal é **infinita**, as correntes de entrada são nulas: $i_1 = i_2 = 0$
- Entretanto, a **corrente de saída** não é necessariamente nula devido às **correntes de alimentação**

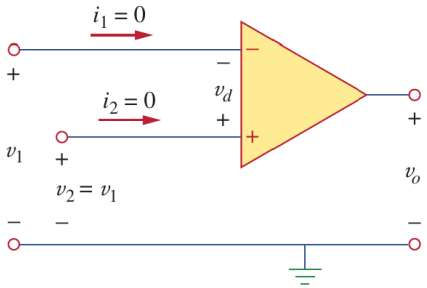


Figura 9: Amplificador operacional ideal.

Amplificador Operacional Ideal

- Sabendo que:
  - A **tensão de saída** é expressa por $v_o = A(v_2 - v_1) = Av_d$
  - A **tensão de saída** é limitada
  - O **ganho de malha aberta** é infinito, $A \to \infty$
- Temos que a **diferença de potência entre os terminais da entrada** (v_d) deve ser **zero**, isto é $v_d = 0$
- Este resultado é conhecido como **curto circuito virtual**

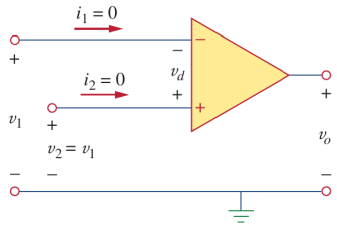


Figura 10: Amplificador operacional ideal.

Amplificador Inversor

- Considere a **topologia de amplificador inversor** apresentada na figura abaixo
- A **entrada não inversora** é aterrada, v_i é conectado à **entrada inversora** através de R_1, e o **resistor de realimentação** R_f é conectado entre a entrada inversora e a saída
- Nosso objetivo é obter a **relação entre a tensão de entrada** v_i e a **tensão de saída** v_o

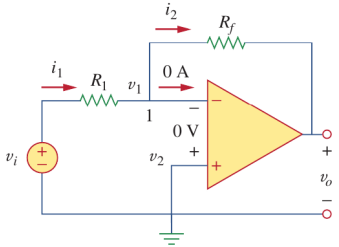


Figura 11: Topologia de amplificador inversor.

Amplificador Inversor

- O **ganho de malha fechada** deste circuito é:

Ganho de Malha Fechada (Inversor)

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_f}{R_1}. \tag{3}$$

Logo, um amplificador inversor inverte a polaridade do sinal de entrada enquanto o amplifica. Observe que o ganho depende unicamente dos elementos externos conectados ao amplificador operacional.

Amplificador Inversor

- **Exemplo 1**: Determine a tensão de saída e a corrente no resistor de realimentação.
  Resposta: $v_o = -1,2$ V, $i_f = 10\ \mu$A.

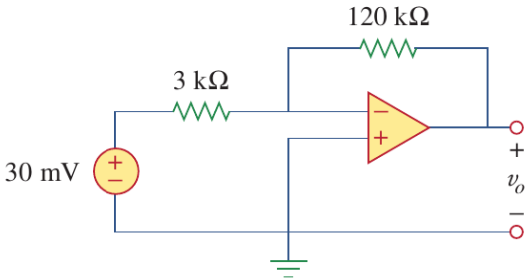


Figura 12: Circuito do Exemplo 1.

Amplificador Inversor

- **Exemplo 2**: Determine a tensão de saída.
  Resposta: $v_o = -6$ V.

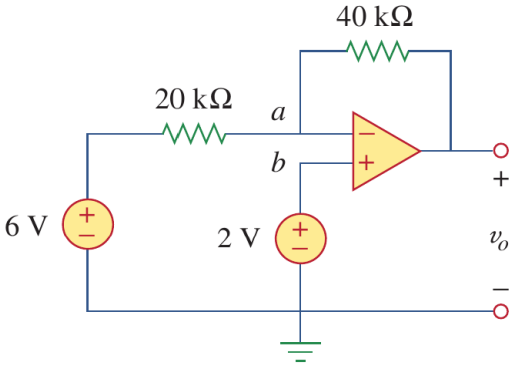


Figura 13: Circuito do Exemplo 2.

Amplificador Não Inversor

- Considere a **topologia de amplificador não inversor** apresentada na figura abaixo
- A **tensão de entrada** v_i é aplicada diretamente no terminal de entrada não inversor, e o resistor R_1 é conectado entre o terra e o terminal inversor
- Nosso objetivo é obter a **relação entre a tensão de entrada** v_i e a **tensão de saída** v_o

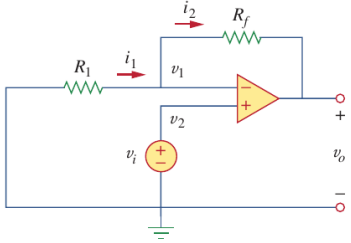


Figura 14: Topologia de amplificador não inversor.

Amplificador Não Inversor

- O **ganho de malha fechada** do amplificador não inversor é expresso por (demonstração em sala de aula):

Ganho de Malha Fechada (Não Inversor)

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_f}{R_1} + 1. \tag{4}$$

Logo, um amplificador não inversor amplifica a tensão e mantém a polaridade do sinal de entrada. Observe que o ganho depende unicamente dos elementos externos conectados ao amplificador operacional.

Amplificador Não Inversor

- Observe que se o **resistor de realimentação** $R_f = 0$ (curto-circuito) ou $R_1 \to \infty$ (circuito aberto) ou ambos, o **ganho do amplificador não inversor se torna** $A_v = 1$
- Sob essas condições ($R_f = 0$ e $R_1 \to \infty$), o circuito não inversor se torna o mostrado abaixo, conhecido como **seguidor de tensão** ou *buffer*

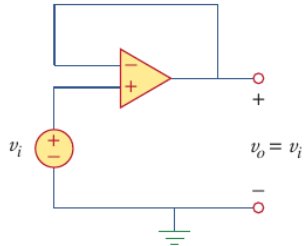


Figura 15: Topologia seguidor de tensão.

Amplificador Não Inversor

- Um *buffer* tem uma **resistência de entrada muito alta** e, portanto, é útil como um amplificador de estágio intermediário para **isolar um circuito de outro**

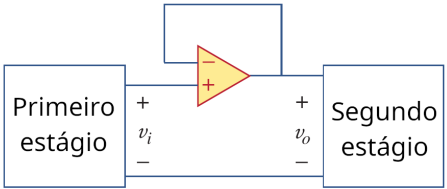


Figura 16: Seguidor de tensão usado para isolar dois estágios de um circuito.

Amplificador Não Inversor

- **Exemplo 4**: Determine o ganho de malha fechada do circuito abaixo.
  Resposta: $A_v = R_2/R_1$.

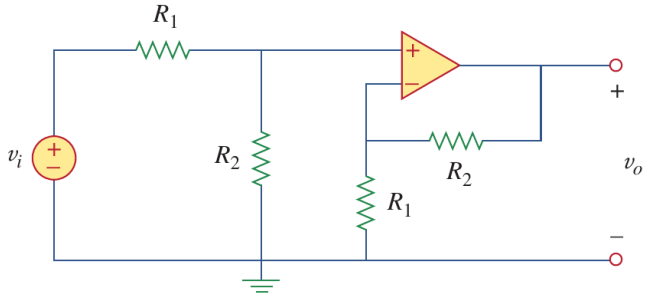


Figura 17: Circuito do Exemplo 4.

Amplificador Não Inversor

- **Exemplo 5**: Determine a corrente i_x no circuito abaixo.
  Resposta: $i_x = 727.2\ \mu$A.

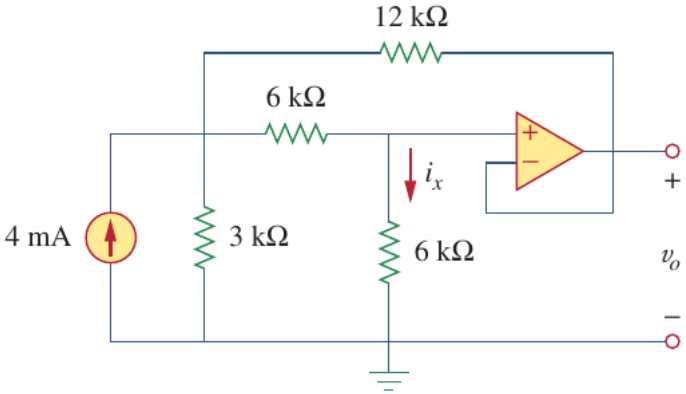


Figura 18: Circuito do Exemplo 5.

Amplificador Somador

- Considere a **topologia de amplificador somador** apresentada na figura abaixo
- Um amplificador somador pode **combinar múltiplas entradas** e produzir uma **saída que é a soma ponderada das entradas**

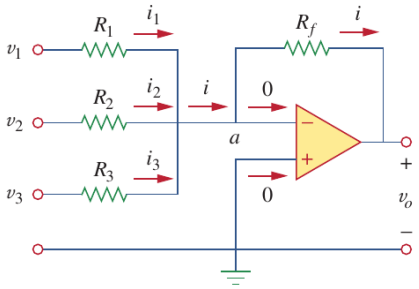


Figura 19: Topologia de amplificador somador.

Amplificador Somador

- Analisando o circuito, temos que:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} = -\frac{v_o}{R_f} \tag{5}$$

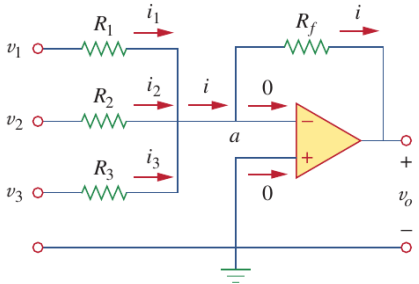


Figura 20: Topologia de amplificador somador.

Amplificador Somador

Tensão de Saída (Amplificador Somador)

$$v_0 = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right) \tag{6}$$

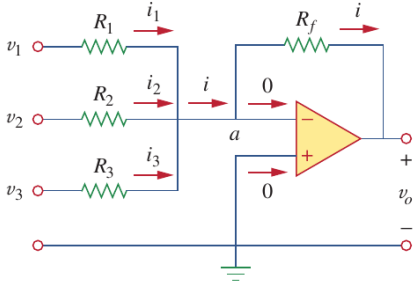


Figura 21: Topologia de amplificador somador.

Amplificador Somador

- **Exemplo 6**: Considerando a topologia abaixo, projete um circuito que calcule a seguinte operação:

$$v_0 = \frac{1}{2}(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}(V_4 - V_3). \tag{7}$$

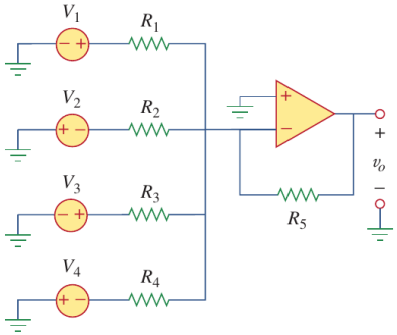


Figura 22: Circuito do Exemplo 6.

Amplificador Somador

- **Exemplo 7**: Considerando o circuito abaixo, determine o valor de v_2 para que a saída seja $v_o = -16.5$ V.
  Resposta: $v_2 = 3$ V.

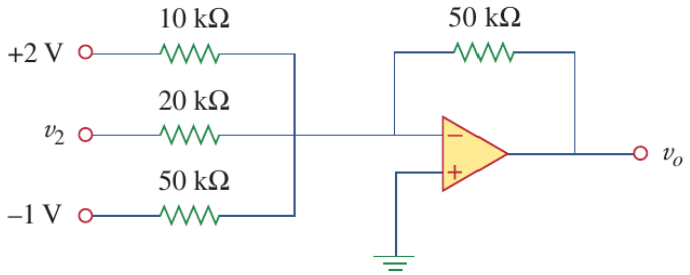


Figura 23: Circuito do Exemplo 7.

Amplificador Somador

- **Exemplo 8**: Demonstre que a tensão de saída do circuito abaixo é expressa por

$$v_o = \frac{R_3 + R_4}{R_3(R_1 + R_2)}(R_2 v_1 + R_1 v_2). \tag{8}$$

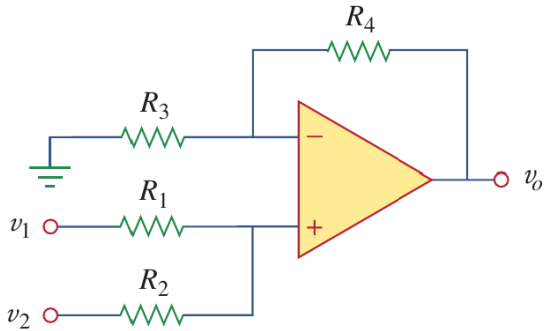


Figura 24: Circuito do Exemplo 8.

Amplificador Somador

- **Exemplo 9**: Usando apenas dois amp ops, projete um circuito que tenha tensão de saída expressa como

$$-v_o = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_3}{2}. \tag{9}$$

Resposta: Inversor concatenado com somador.

Amplificador Diferencial

- Considere a **topologia de amplificador diferencial** apresentada na figura abaixo
- Um amplificador diferencial é usado para **amplificar a diferença entre dois sinais de entrada**

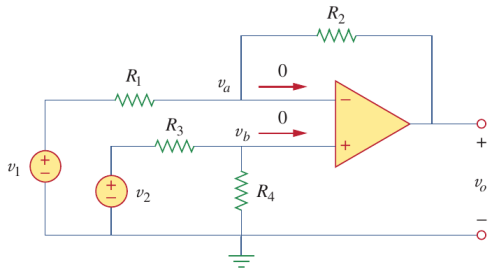


Figura 25: Topologia de amplificador diferencial.

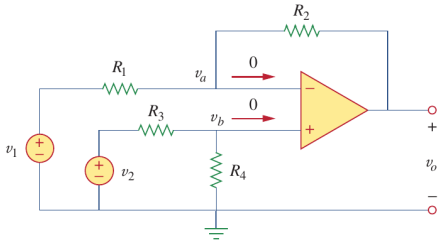
Amplificador Diferencial

- Aplicando LKC no nó a:

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_o}{R_2}, \tag{10}$$

logo,

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) v_a - \frac{R_2}{R_1} v_1 \tag{11}$$



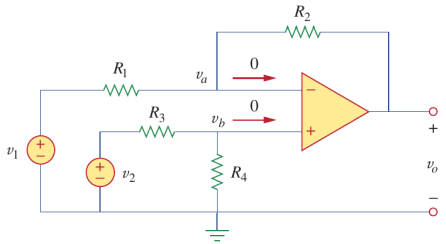
Amplificador Diferencial

- Aplicando LKC no nó b:

$$\frac{v_2 - v_b}{R_3} = \frac{v_b}{R_4}, \tag{12}$$

logo,

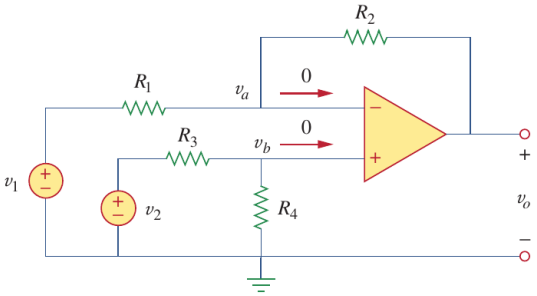
$$v_b = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2. \tag{13}$$



Amplificador Diferencial

- Considerando o curto-circuito virtual ($v_a = v_b$), encontramos que

$$v_o = \frac{R_2(1 + R_1/R_2)}{R_1(1 + R_3/R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \tag{14}$$



Amplificador Diferencial

- Em geral, é desejado que um amplificador diferencial **rejeite o sinal comum às duas entradas**
- Para isso, o amplificador diferencial deve ter a **propriedade** de que $v_o = 0$ quando $v_1 = v_2$
- Esta propriedade é satisfeita quando:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_3} \tag{15}$$

- Neste caso, a **resposta do amplificador diferencial** se torna

$$v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) \tag{16}$$

Amplificador Diferencial

- **Exemplo 10**: Considere o amplificador diferencial apresentado na figura abaixo. Determine v_o dado que $v_1 = 1$ V e $v_2 = 2$ V.
  Resposta: 14.09 V.

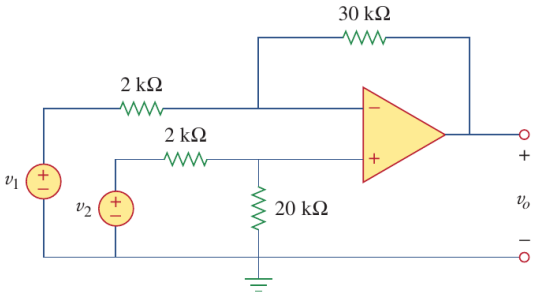


Figura 26: Circuito do Exemplo 10.

Amplificador Diferencial

- **Exemplo 11**: Considere o amplificador diferencial apresentado na figura abaixo. Determine v_o .
  Resposta: -3.34 mV.

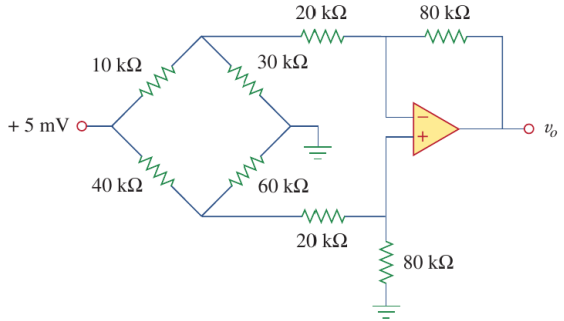


Figura 27: Circuito do Exemplo 11.

Circuitos em Cascata

- Os circuitos de amplificadores operacionais são **módulos ou blocos de construção para projetar circuitos complexos**
- Em aplicações práticas, muitas vezes é necessário **conectar circuitos de amplificadores operacionais em cascata** para obter um determinado ganho geral
- Quando os circuitos do amplificador operacional são conectados em cascata, cada circuito na sequência é chamado de **estágio**; o sinal de entrada original é aumentado pelo ganho do estágio individual

Circuitos em Cascata

- Os circuitos de amplificadores operacionais têm a vantagem de poderem ser **conectados em cascata sem alterar suas relações de entrada-saída**
- Isso se deve ao fato de que cada **circuito amplificador operacional** (ideal) tem **resistência de entrada infinita e resistência de saída zero**
- Considerando, por exemplo, o circuito de três estágios abaixo, o **ganho total do circuito** é expresso por

$$A = \frac{v_o}{v_1} = A_1 A_2 A_3 \tag{17}$$

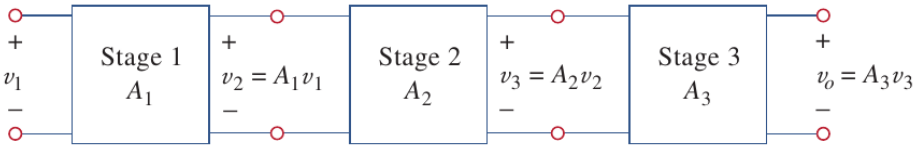


Figura 28: Conexão em cascata em três estágios.

Circuitos em Cascata

- Embora a **conexão em cascata não afete as relações de entrada-saída do amplificador operacional**, deve-se ter cuidado no **projeto de um circuito de amplificador operacional real** para garantir que a carga devida ao próximo estágio na cascata **não sature o amplificador operacional**

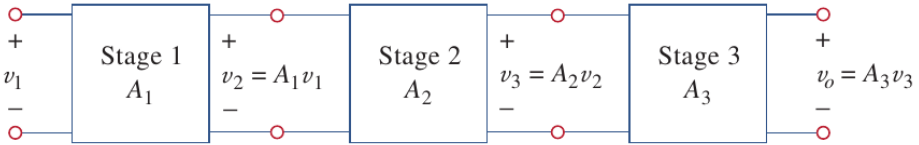


Figura 29: Conexão em cascata em três estágios.

Circuitos em Cascata

- **Exemplo 12**: Determine a tensão v_o no circuito abaixo, considerando que $v_1 = 1$ e $v_2 = 2$.
  Resposta: 8.667 V.

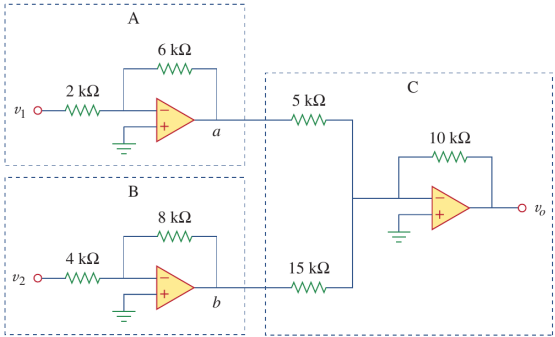


Figura 30: Circuito do Exemplo 12.

ENE0066 - Introdução aos Circuitos Elétricos

Amplificadores Operacionais

Prof. Hugerles S. Silva[1]
hugerles.silva@unb.br

[1]Universidade de Brasília
UnB

2026

Universidade de Brasília